Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada
Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Computação

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EM DIREÇÃO A UMA REPRESENTAÇÃO PARA EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: UMA LÓGICA EQUACIONAL LOCAL

José Medeiros dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago

NATAL/RN
Julho/2001

JOSÉ MEDEIROS DOS SANTOS

EM DIREÇÃO A UMA REPRESENTAÇÃO PARA EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: UMA LÓGICA EQUACIONAL LOCAL.

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Mestrado em Sistemas e Computação do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Sistemas e Computação.

Orientador: Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago

Natal/RN
Julho/2001

Santos, José Medeiros dos – *Em direção a uma representação para equações algébricas: uma lógica equacional local*. Dissertação de Mestrado, UFRN/DIMAp, Mestrado em Sistemas e Computação, Área de concentração: Matemática Computacional/Matemática Intervalar, Natal/RN, Brasil.

Orientador: Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago

Resumo: A aritmética intervalar conhecida como aritmética de Moore, não possui as mesmas propriedades dos números reais, e por este motivo, defronta-se com um problema de natureza operatória, quando se deseja resolver equações intervalares como extensão de equações reais através da igualdade usual e da aritmética intervalar, por esta não possuir o inverso aditivo, como também, a propriedade da distributividade da multiplicação pela soma não ser válida para qualquer terno de intervalos. A falta dessas propriedades impossibilita a utilização da lógica equacional, tanto para a resolução de uma equação intervalar usando a mesma, como para uma representação de uma equação real, e ainda, para a verificação algébrica de propriedades de um sistema computacional, cujos dados sejam números reais representados através de intervalos. Entretanto, com a noção de ordem de informação e de aproximação sobre intervalos, introduzida por Acióly[6] em 1991, surge a idéia de uma equação intervalar representar satisfatoriamente uma equação real, já que os termos da equação intervalar carregam a informação sobre a solução da equação real. Em 1999, Santiago propôs a noção de igualdade simples e, posteriormente, igualdade local para intervalos [8] e [33]. Baseado nessa idéia, esta dissertação estende os conjuntos locais de Santiago para álgebras locais, seguindo a idéia de Σ-álgebras contidas em (Hennessy[31], 1988) e (Santiago[7], 1995). Uma das contribuições desta dissertação é o teorema 5.1.3.2 que garante que, ao se deduzir uma Σ-equação local $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ no sistema $SDed_{Loc}(E)$ proposto, as interpretações de t e t' serão localmente iguais em qualquer Σ-álgebra local que satisfaça o conjunto de equações locais E fixado, sempre que t e t' tiverem significado em A. Isto garante um tipo de segurança entre a lógica equacional local e as álgebras locais.

Palavras-chaves:

- Matemática Intervalar
- Σ-álgebras
- Equação Intervalar
- Lógica Equacional
- Lógica Equacional Local
- Sistemas Dedutivos

Data da Defesa: 17 de julho de 2001.

Banca Examinadora:

Presidente:	Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago	- DIMAp/UFRN
Membros:	Prof. Dr. Benedito Melo Acióly	- UESB/BA
	Prof. Dr. Benjamin René Callejas Bedregal	- DIMAp/UFRN

ABSTRACT

The intervalar arithmetic well-known as arithmetic of Moore, doesn't possess the same properties of the real numbers, and for this reason, it is confronted with a problem of operative nature, when we want to solve intervalar equations as extension of real equations by the usual equality and of the intervalar arithmetic, for this not to possess the inverse addictive, as well as, the property of the distributivity of the multiplication for the sum doesn’t be valid for any triplet of intervals. The lack of those properties disables the use of equacional logic, so much for the resolution of an intervalar equation using the same, as for a representation of a real equation, and still, for the algebraic verification of properties of a computational system, whose data are real numbers represented by intervals. However, with the notion of order of information and of approach on intervals, introduced by Acióly[6] in 1991, the idea of an intervalar equation appears to represent a real equation satisfactorily, since the terms of the intervalar equation carry the information about the solution of the real equation. In 1999, Santiago proposed the notion of simple equality and, later on, local equality for intervals [8] and [33]. Based on that idea, this dissertation extends Santiago's local groups for local algebras, following the idea of Σ-algebras according to (Hennessy[31], 1988) and (Santiago[7], 1995). One of the contributions of this dissertation, is the theorem 5.1.3.2 that it guarantees that, when deducing a local Σ-equation $\vdash_E t \stackrel{loc}{=} t'$ in the proposed system $SDed_{Loc}(E)$, the interpretations of t and t' will be locally the same in any local Σ-algebra that satisfies the group of fixed equations local E, whenever t and t’ have meaning in A. This assures to a kind of safety between the local equacional logic and the local algebras.

Word-keys:

- Intervalar mathematics
- Intervalar equation
- Local equacional logic
- Σ-algebras
- Equacional logic
- Deductive systems.

“Não há ramo da matemática, por abstrato que seja,
que não possa um dia vir a ser aplicado
aos fenômenos do mundo real”.

Nicolai I. Lobachevsky

DEDICATÓRIA

À Deus, o meu eterno protetor, pelo que tem acontecido
de bom em todos os momentos de minha vida.

À minha família, em especial aos meus pais,
Antônio Medeiros e Tezera Dias (in memoriam), o meu eterno
reconhecimento pelo apoio, conselhos, incentivo e afetividade.

À minha esposa Shirlane Arruda e meus filhos Thalita e Natan,
os meus sinceros agradecimentos pela compreensão, apoio e
afetividade.

Aos meus nove irmãos, Inácio, Luiz, Agenor, Uilton, Francisco,
Maurício, Antônio, Valdemir e Geraldo, pelo apoio e incentivo.

As minhas estimadas e inesquecíveis professoras: Maria Anunciada
de Medeiros, Ana Dias, Haidée Nóbrega e Maria Dina, o meu
reconhecimento pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Regivan Hugo Nunes Santiago pela paciência, compreensão e inteligência com que conduziu a orientação desta dissertação.

Ao Prof. Benjamin René Callejas Bedregal, pelos ensinamentos e apoio transmitidos durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. Benedito Melo Acióly, pela orientação num primeiro momento e a contribuição proporcionada por ocasião da participação na banca examinadora, através de correções e sugestões.

Aos colegas de mestrado, Márcia Cruz, Inalva, Lívia, Juraneide, Ytalo, Ana Paula e Neuza, pela amizade e companheirismo durante o curso.

A Profa. Anamaria, ex-Coordenadora do Mestrado em Sistemas e Computação e ao Prof. David Déharbe, atual Coordenador, pelo apoio durante a realização deste trabalho.

Aos funcionários, José Francisco e Maria das Graças, pelo apoio dispensado.

Aos Professores Osvaldo Chiavone Filho (ex-Coordenador do PPGEQ), Gorete Ribeiro de Macedo (atual Coordenadora do PPGEQ), Márcia Maria Lima Duarte (Chefe do Departamento de Engenharia Química) e a colega de trabalho Eusamar Coelho de Lima, pelo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Sumário

Nomenclaturas

IR	Conjunto dos intervalos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{IC}$	Conjunto dos intervalos complexos
Poset	Conjunto parcialmente ordenados
I(R)	Conjunto dos intervalos de reais
$\wp(X)$	Partes do conjunto X ou subconjuntos de X
UB(S)	Conjunto de todos os majorantes de S
LB(S)	Conjunto de todos os minorantes de S
$\uparrow A$	Conjunto de todos os elementos acima de algum elemento de A
$\downarrow A$	Conjunto de todos os elementos abaixo de algum elemento de A
MUB(S)	Majorante mínimo de S
MLB(S)	Minorante máximo de S
$\sqcup S$	Supremo de S
$\sqcap S$	Ínfimo de S
CPO	Ordem Parcial Completa
DCPO	Ordem Parcial Completa Dirigida
$\downarrow\Delta$	Subconjunto dirigido para baixo (downward)
$\downarrow_B x$	Subconjunto com base dirigida
$\downarrow \boldsymbol{a}$	Conjunto de todos os elementos de B (Base)
$[\![\bullet = \bullet]\!]$	Igualdade simples entre intervalos
Σ	Assinatura
T_Σ	Σ-Álgebra dos termos
$\mathcal{C}$	Classe de Σ-álgebras
A/R	Relação sobre o conjunto A
ρ_A	Uma "*A-atribuição*"
ρ	Uma "*substituição*"
$t\rho$	Uma "*instanciação*"
$\mathcal{C}(E)$	Classe de equações
T_Σ/R	Relação sobre T_Σ
$T_\Sigma/=_E$	Relação de igualdade (equacional) sobre T_Σ
SDed(E)	Sistema dedutivo para equações
$\mathrm{SDed}_{\mathrm{Loc}}(E)$	Sistema dedutivo para equações locais
$\overset{loc}{=}$	Igualdade local
$\mathcal{E}$	Predicado unário de existência
$[\![\bullet \overset{loc}{=} \bullet]\!]$	Igualdade local sobre intervalos
$\bigcup$	Operador de supremo na lógica equacional local

Catalogação da publicação.
UFRN/Bibliotecas Setoriais do Centro de Ciências Exatas e da Terra
Bibliotecária: Cecília Isabel dos Santos – CRB-4/1077

Santos, José Medeiros dos

Em direção a uma representação para equações algébricas: uma lógica equacional local / José Medeiros dos Santos. ___ Natal: [s.n.], 2001.

161p. : il.

Orientador: Regivan Hugo Nunes Santiago

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Departamento de Informática e Matemática Aplicada. Mestrado em Sistemas e Computação.

1. Matemática computacional – Tese. 2. Matemática intervalar – Tese. 3. Sistema dedutivo – Tese. 4. Equação intervalar – Tese. 5. Lógica equacional – Tese. I. Título.

RN/UF/BSECCET CDU: 519.6 (043.2)

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

A precisão de cálculos matemáticos, em diversos ramos da ciência e da tecnologia, tem sido tema de pesquisa, de trabalhos científicos, buscando sempre o desenvolvimento de algoritmos aritméticos, com o objetivo de alcançar a melhor precisão possível, dentro de um processamento de dados numéricos. Na verdade, a boa precisão nem sempre é alcançada, não pela qualidade do algoritmo, mas principalmente, pela qualidade dos dados de entrada, que muitas vezes são imprecisos, pois advém de algum sistema de medida que fornece dados com valores aproximados (truncados ou arredondados), e por erros causados durante o processamento dos cálculos, devido as restrições operacionais da máquina, que pode usar tanto o truncamento quanto o arredondamento de dados que não possuem representação finita na linguagem de máquina.

Dentre os trabalhos científicos, está o estudo da aritmética intervalar, proposta por Moore[18] e Sunaga[37] na década de 50, com o objetivo de mostrar uma solução segura e confiável para problemas que não têm uma entrada de dados exatos, ou não têm uma representação finita na linguagem de máquina, que possam causar erros de truncamento ou arredondamento durante as interações. Um dado intervalar carrega o erro máximo de um dado numérico e um resultado intervalar possui o erro propagado pelas operações aritméticas intervalares. Diante dessa constatação, a matemática intervalar tem sido bastante estudada, tanto no aspecto aritmético quanto no aspecto algébrico e lógico. No aspecto aritmética pode-se destacar a aritmética de Moore. No aspecto lógico, pode-se destacar as noções de ordens de informação e aproximação entre intervalos, introduzidas por Acioly[6] em 1991, enquanto que no aspecto algébrico, a noção intervalar simples introduzida por Santiago[8] em 1999 e a axiomática de equações intervalares locais introduzida por Santiago[33] em 2000.

Baseado nessas idéias e dando continuidade ao estudo da matemática intervalar, pretende-se formalizar a noção de álgebra local e classes equacionais locais, através de um sistema dedutivo para equações locais, i.e., através de uma lógica equacional local, que permita a representação de equações algébricas reais através de equações intervalares locais. Dessa forma, esta dissertação propõe uma espécie de lógica equacional para a relação de igualdade local, a fim de fornecer o fundamental para a resolução de equações algébricas através de equações intervalares locais, justificando assim, o título desta dissertação.

No que segue, será feito ainda dentro desta introdução, uma contextualização sobre a questão do erro em computação numérica, além da apresentação da análise intervalar, domínios contínuos e da igualdade simples de Scott. Por último, este capítulo apresentará uma descrição sucinta de cada capítulo desta dissertação.

1.1. ERROS DE REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

No método de resolução de problema numéricos com auxílio do computador, é possível distinguir várias fases mais ou menos distintas. A primeira fase é a formulação de um modelo matemático para o problema, onde deve-se levar em conta que o mesmo será resolvido por um computador, e portanto, é bastante importante entrar com os dados apropriados, testá-los, prever o tipo e a quantidade de informações a serem fornecidas pelo computador.

Uma vez formulado um problema, devem ser planejados métodos numéricos juntamente com uma análise preliminar dos erros, para a sua solução. Um método numérico que pode ser usado para resolver um problema é chamado "*algoritmo numérico*", o qual é um completo e preciso conjunto de ações para resolver um problema matemático.

Escolhido um algoritmo, ou um conjunto de algoritmos, para resolver o problema, deve-se está ciente de todas as fontes de erros que possam afetar os resultados. Pois, na computação científica e tecnológica, a qualidade de um resultado depende do conhecimento e do controle que se possa ter sobre seu erro. Por isso, deve-se considerar a precisão requerida, estimar a grandeza dos erros de arredondamento, truncamento e oriundos de valores arbitrários ou imprecisos, além da propagação desses erros, nos dados iniciais, ou de arredondamentos, ou de truncamentos, dentro das inúmeras etapas ou iterações requeridas no processamento dos cálculos pelo computador. Deve-se ainda, prever testes adequados para avaliar a precisão e estipular a tolerância para ações corretivas, no caso de não haver convergência.

Os resultados obtidos numa computação científica dependem ainda, segundo (Ruggiero & Lopes[1], 1996, p.2):

- da precisão dos dados de entrada;
- da forma como estes dados são representados no computador; e
- das operações numéricas efetuadas.

A imprecisão dos dados de entrada é uma inerência, ou seja, não há como evitá-la, pois muitas vezes representam medidas obtidas usando equipamentos específicos, que fornecem medidas já truncadas ou arredondadas, como por exemplo, no caso de medidas de corrente e tensão num circuito elétrico, ou ainda, podem ser dados resultantes de pesquisas ou levantamentos, como no caso de pesquisas de campo, para medir índices (de preço, de inflação, de aumento populacional, etc.).

Qualquer cálculo que envolva números sem uma representação finita de dígitos não pode fornecer um resultado exato. Como por exemplos: *1)* "*cálculo da área de uma circunferência*", cujo resultado nunca será exato, e cuja aproximação dependerá do valor escolhido para π, pois este é um número irracional. *2) "cálculo da correção de um capital pelo sistema de capitalização composta*". Este cálculo, dificilmente, também será exato, devido ao fator de capitalização possuir, na maioria da vezes, uma infinidade de dígitos, pois como seria a precisão dos cálculos de um sistema bancário, se fosse usado poucos dígitos no fator de capitalização? Para este cálculo, quanto maior for o número de dígitos utilizados, maior será a precisão obtida.

Além disso, duas máquinas diferentes podem fornecer resultados diferentes para o mesmo cálculo, pois ele "*depende da representação dos números na máquina utilizada*" (Ruggiero & Lopes[1], 1996, p. 3). Para exemplificar esta afirmação, tem-se o seguinte problema: "*efetuar os somatórios seguintes em uma calculadora e em um computador*":

$$S = \sum_{i=1}^{30000} x_i \quad \text{para } x_i = 0{,}5 \text{ e para } x_i = 0{,}11.$$

Foram constatados os seguintes resultados:

i) Para $x_i = 0{,}5$ $\quad \begin{cases} \text{na calculadora: } & S = 15.000 \\ \text{no computador: } & S = 15.000 \end{cases}$

ii) Para $x_i = 0{,}11$ $\quad \begin{cases} \text{na calculadora: } & S = 3.300 \\ \text{no computador: } & S = 2.299{,}99691. \end{cases}$

No exemplo acima, o erro ocorreu porque $x_i = 0{,}11$ tem uma representação binária infinita e como o computador possui uma quantidade fixa de posições para guardar os dígitos da mantissa de um número, foi usada uma aproximação para realizar os cálculos. Dessa maneira, a representação de um número depende da base escolhida ou disponível na máquina em uso e do número máximo de dígitos usados na sua representação. Assim, na interação entre o usuário e o computador, os dados de entrada são enviados ao computador pelo usuário no sistema decimal, esses dados são convertidos para o sistema binário (ou hexadecimal), as operações são realizadas nesse sistema, e em seguida, os resultados finais são convertidos para o sistema decimal e transmitidos ao usuário. Todo esse processo de conversão é uma fonte de erros que afeta o resultado final dos cálculos.

Existe um sistema padrão de representação de números reais num computador, chamado "***aritmética de ponto flutuante***". Nessa aritmética, o número real r assume a seguinte forma:

$\pm (.d_1 d_2 d_3 \ldots d_n)_\beta \times \beta^e$, onde:

- β é a base em que a máquina opera;
- n é o número de dígitos na mantissa; para $0 \leq d_j \leq (\beta - 1)$, j = 1 ... n, $d_1 \neq 0$.
- e é um expoente que varia num intervalo [k, u] que são os limites inferior e superior da máquina, respectivamente.

Para qualquer máquina, apenas um subconjunto dos números reais tem representação exata, e, portanto, a representação de um número real será realizada, na maioria das vezes, através de truncamento ou arredondamento. Por exemplo, considerando-se uma máquina que opera no sistema abaixo:

- $\boldsymbol{\beta = 10;\ n = 3,\ e \in [-5, 5]}$.

Os números são representados na seguinte forma:

- $\boldsymbol{0.d_1d_2d_3 \times 10^e,\ 0 \leq d_j \leq 9,\ d_1 \neq 0,\ e \in [-5, 5]}$.

Assim, um certo número x = 103, pode ser representado neste sistema como: $x = 0.103 \times 10^3$. Mas, para um número y = 10357, não é possível representá-lo de maneira exata, pois $y = 0.10357 \times 10^5$, e como neste sistema n = 3, então y deve ser truncado ou arredondado para ser representado nesta máquina.

Na máquina acima, o menor e o maior número, em valor absoluto, que podem ser representados, são:

- Menor valor: $\mathbf{m} = 0.100 \times 10^{-5} = 10^{-6}$
- Maior valor: $\mathbf{M} = 0.999 \times 10^5 = 99900$.

Esta máquina só pode operar dentro destes limites absolutos, ou seja, para o conjunto dos números reais R, ela só pode representar dados de entrada e resultados de operações que estejam dentro do seguinte subconjunto:

$\mathbf{L = \{x \in R/\ m \leq |\, x \,| \leq M\}} = \{x \in R/\ 0.100 \times 10^{-5} \leq |\, x \,| \leq 0.999 \times 10^5\}$.

Na verdade, estes limites absolutos são delimitados pelo mesmo intervalo de variação do expoente da base de representação.

Assim, dado um número real x, segundo (Ruggiero & Lopes[1], 1996, p.11), pode-se considerar algumas situações na máquina supra citada, ou seja, $\beta = 10$; $n = 3$, $e \in [-5, 5]$:

1º) Caso: Para $x \in L$,

Se $x = 235{,}89 \Rightarrow x = 0.23589 \times 10^3$. Como a mantissa possui 5 dígitos e a máquina só aceita 3, então pode-se fazer uma aproximação de duas maneiras:

- $x = 0.235 \times 10^3$ (através do truncamento), ou
- $x = 0.236 \times 10^3$ (através do arredondamento).

2º) Caso: Para $x \notin L$,

- Se $|x| < m$. Por exemplo, $x = 0.345 \times 10^{-7}$. Observa-se que o expoente é menor que –5. Nesse caso, a máquina acusa a ocorrência de **underflow**.

- Se $|x| > M$. Por exemplo, $x = 0.875 \times 10^9$. Observa-se também que o expoente é maior que 5. Nesse caso, a máquina acusa a ocorrência de **overflow**.

Para minimizar estes problemas, muitas linguagens de programação permitem que as variáveis sejam declaradas em precisão dupla. Neste caso, esta variável será representada no sistema de aritmética de ponto flutuante da máquina, mas com aproximadamente o dobro de dígitos disponíveis na mantissa. Por outro lado, o tempo de execução e requerimentos de memória aumentam de forma significativa.

Quanto aos erros, estes podem ser avaliados sob dois aspectos: **erro absoluto** e **erro relativo**.

1º) Erro Absoluto (EA): Este é definido como sendo a diferença entre o ***valor exato*** de um número "x" e seu ***valor aproximado*** "$\bar{x}$", onde o mesmo é dado pela expressão:

$$EA_x = x - \bar{x}.$$

Como, geralmente, apenas o valor aproximado $\bar{x}$ é conhecido, torna-se impossível se estabelecer um erro máximo permitido, i.e., obter o valor exato do erro absoluto. Neste caso, o limitante superior para o erro absoluto é $|EA_x| = |x - \bar{x}|$. Por exemplo, tomando-se $\bar{\pi}$ para π e estabelecendo-se 0.01 como o erro máximo permitido, tem-se $|\pi - \bar{\pi}| < 0.01 \Leftrightarrow \pi \in (\bar{\pi} - 0.01,\ \bar{\pi} + 0.01)$ e, como tanto $\bar{\pi}$ quanto a estimativa 0.01 são representáveis, então pode-se descartar π e utilizar $\overline{\pi}$ dentro da tolerância 0.01. Agora, seja x representado por $\overline{x} = 2112{,}9$ e $|EA_x| < 0{,}1$, ou seja, $x \in (2112.8, 2113)$. E seja também y, representado por $\overline{y} = 5.3$ tal que $|EA_y| < 0.1$, ou seja, $y \in (5.2, 5.4)$. Nos dois últimos casos, pode-se afirmar que os limitantes para os erros absolutos são os mesmos para x e y. Mas, para avaliar a precisão, precisa-se comparar a ordem de grandeza de x e y. Isto é, para dois números, cujos limitantes superiores dos erros absolutos são os mesmos, o número que tiver maior ordem de grandeza, torna-se mais preciso que o que tiver menor ordem. Assim, x é mais preciso que y, pois x é maior que y.

Dependendo da ordem de grandeza dos números envolvidos, o erro absoluto não é suficiente para descrever a precisão de um cálculo. Por esta razão, o erro relativo é amplamente empregado.

2º) **Erro Relativo (ER):** Este é definido como sendo o erro absoluto dividido pelo valor aproximado. Assim, o erro relativo é dado pela seguinte expressão:

$$ER_x = \frac{EA_x}{\overline{x}} = \frac{x - \overline{x}}{\overline{x}}.$$

Agora, avaliando-se o exemplo anterior, do ponto de vista do erro relativo, tem-se:

- $|\mathbf{ER}_x| = \dfrac{|EA_x|}{|\overline{x}|} < \dfrac{0{,}1}{2112{,}9} \approx 4{,}7 \times 10^{-5}$
- $|\mathbf{ER}_y| = \dfrac{|EA_y|}{|\overline{y}|} < \dfrac{0{,}1}{5{,}3} \approx 0.02$. Confirmando-se, portanto, uma maior precisão para x, comparado com y.

Estes erros também podem ser avaliados no sistema de aritmética de ponto flutuante. Seja um sistema que opera em aritmética de ponto flutuante, de n dígitos na base 10, e seja x, escrito na forma:

$$x = f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n}$$

onde $0{,}1 \le f_x < 1$ corresponde à mantissa, $e \in [m, M]$, n é o número máximo de dígitos da mantissa e $0 \le g_x < 1$ é o que sobra da representação de x em f_x.

Exemplo:

Seja $n = 4$ e $x = 234{,}57$. Então $x = 0{,}23457 \times 10^3$. Como $n = 4$, i.e., a mantissa só aceita 4 casas decimais, então,

$$\begin{aligned} x &= 0{,}2345 \times 10^3 + 0{,}00007 \times 10^3 \\ &= 0{,}2345 \times 10^3 + 0{,}7 \times 10^{-4} \times 10^3 \\ &= 0{,}2345 \times 10^3 + 0{,}7 \times 10^{3-4}. \end{aligned}$$

Como na representação de x neste sistema, $g_x \times 10^{e-n}$ não pode ser incorporado totalmente à mantissa, então, como considerá-la ou não na mantissa e como definir o erro absoluto (ou relativo) máximo cometido?

Para responder a esta questão, pode-se adotar dois critérios: o do ***arredondamento*** e o do ***truncamento***.

1º) **Truncamento:** Neste caso, $g_x \times 10^{e-n}$ é desprezado e $\bar{x} = f_x \times 10^e$ (valor aproximado). Então,

- $|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x| \times 10^{e-n} < 10^{e-n}$, visto que $|g_x| < 1$. Logo, obtém-se, imediatamente, o erro máximo permitido; a saber 10^{e-n}.
- $|ER_x| = \dfrac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \dfrac{|g_x| \times 10^{e-n}}{|f_x| \times 10^e} < \dfrac{10^{e-n}}{0.1 \times 10^e} = 10^{1-n}$, visto que 0.1 é o menor valor possível para f_x.

Desta forma, $|EA_x|$ é inferior a 10^{e-n} e $|ER_x|$ é inferior a 10^{1-n} no truncamento.

2º) **Arredondamento:** Neste caso, f_x é modificado para levar em consideração g_x. A forma de arredondamento mais utilizada é o ***arredondamento simétrico***:, ou seja:

$$\bar{x} = \begin{cases} f_x \times 10^e, & \text{se } |g_x| < \dfrac{1}{2} \\ f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n}, & \text{se } |g_x| \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Neste caso, se $|g_x| < \frac{1}{2}$, o mesmo é desprezado, caso contrário, soma-se 1 ao último dígito de f_x. Então, considerando-se os dois casos acima, tem-se:

1º) Para $|g_x| < \frac{1}{2}$, tem-se:

- $|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x| + 10^{e-n} < \dfrac{1}{2} \times 10^{e-n}$, e
- $|ER_x| = \dfrac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \dfrac{|g_x| \times 10^{e-n}}{|f_x| \times 10^e} < \dfrac{0.5 \times 10^{e-n}}{0.1 \times 10^e} = \dfrac{1}{2} \times 10^{1-n}$.

Neste caso, o erro máximo cometido para o arredondamento quando $|g_x| < \frac{1}{2}$ será inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{e-n}$ para $|EA_x|$ e a $\frac{1}{2} \times 10^{1-n}$ para $|ER_x|$.

2º) Para $|g_x| \geq \frac{1}{2}$, tem-se:

- $|EA_x| = |x - \bar{x}| = \left|\left(f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n}\right) - \left(f_x \times 10^e + 10^{e-n}\right)\right| = \left|g_x \times 10^{e-n} - 10^{e-n}\right| = \left|(g_x - 1)\right| \times 10^{e-n} \leq \frac{1}{2} \times 10^{e-n}$.

Neste caso, o erro máximo absoluto cometido para o arredondamento quando $|g_x| \geq \frac{1}{2}$ será menor ou igual a $\frac{1}{2} \times 10^{e-n}$.

- $|\mathbf{ER_x}| = \dfrac{|EA_x|}{|\bar{x}|} \leq \dfrac{\frac{1}{2} \times 10^{e-n}}{\left|f_x \times 10^e + 10^{e-n}\right|} < \dfrac{\frac{1}{2} \times 10^{e-n}}{|f_x| \times 10^e} < \dfrac{0.5 \times 10^{e-n}}{0.1 \times 10^e} = \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$.

Neste caso, o erro máximo relativo cometido para o arredondamento quando $|g_x| \geq \frac{1}{2}$ será inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{1-n}$.

Apesar de incorrer em erros menores, o uso do arredondamento acarreta um tempo maior de execução e por esta razão o truncamento é mais utilizado, segundo (Ruggiero & Lopes[1], 1996, p.15).

Resumindo o que foi descrito sobre erros, pode-se afirmar que para uma seqüência de operações, o erro total de uma cálculo é composto pelo erro das parcelas ou fatores, que se propagam até o resultado final, chama-se isso "*propagação do erro dos dados iniciais*". Para ilustrar estas afirmações, mostrar-se-á algumas operações individuais, para perceber-se como cada operação acumula erro, que se propaga até o resultado final de uma expressão.

Exemplos:

Considerando as operações na aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos, na base 10, tem-se:

1) Dados x = 0,937 x 10^4 e y = 0,1272 x 10^2, obter x + y.

   Primeiro deve-se tornar as potências semelhantes, isto é:

   x = 0,937 x 10^4 e y = 0,001272 x 10^4, então,

   x + y = (0,937 + 0,001272) x 10^4 = 0,938272 x 10^4 (número exata).

Como n = 4, este resultado deve ser arredondado ou truncado. Assim, pode haver dois resultados:

- $\overline{x + y} = 0{,}9383 \text{ x } 10^4$ (no arredondamento), ou
- $\overline{x + y} = 0{,}9382 \text{ x } 10^4$ (no truncamento).

2) Dados $x = 0{,}937 \times 10^4$ e $y = 0{,}1272 \times 10^2$, obter $x \cdot y$. Então,

   $x \cdot y = (0{,}937 \times 10^4) \times (0{,}1272 \times 10^2) = (0{,}937 \times 0{,}1272) \times 10^6 = 0.1191864 \times 10^6$.

   Como n = 4, este resultado deve ser arredondado ou truncado. Assim, também pode haver dois resultados:

- $\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = 0{,}1192 \text{ x } 10^6$ (no arredondamento), ou
- $\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = 0{,}1191 \text{ x } 10^4$ (no truncamento).

Observa-se nos exemplos acima, que mesmo as parcelas ou fatores estando representados de maneira exata no sistema, *"não se pode esperar que o resultado armazenado seja exato*" (Ruggiero & Lopes[1], 1996, p.17), mais ainda, se duas máquinas implementam algoritmos de representação distinta (uma, o algoritmo de truncamento e outra, o algoritmo de arredondamento) para o mesmo tamanho de mantissa, os resultados dessas máquinas serão diferentes.

A propagação do erro a partir dos dados iniciais, não obedece a nenhuma lei conhecida; no que segue será apresentada uma alternativa para a representação numérica, a saber, intervalos fechados de extremos racionais munidos da aritmética de Moore. Naquele sistema o resultado da operação entre intervalos sempre será um intervalo [a, b] e o erro máximo cometido será de $\frac{b - a}{2}$, minimizando assim a questão do controle do erro que se propaga durante as operações.

1.2. ANÁLISE INTERVALAR

Segundo (Santos; Aguiar; Dimuro[4], 1994, p.309) "*a qualidade de um resultado em computação científica e tecnológica, depende do conhecimento e do controle que se possa ter sobre seu erro".* Dentre os métodos de resolução deste de tipo de problema, o ***método clássico de estimativa de erro*** é o que obtém um resultado de melhor qualidade, porém, extenso, dispendioso e, as vezes, inviável. Ainda, segundo (Santos; Aguiar; Dimuro[4], 1994, p.309) "*as vezes os algoritmos convencionais conciliados com o método clássico de* *estimativa de erro fornecem resultados equivocados, sem garantia alguma de que o resultado obtido eqüivale ao esperado*".

Sem dúvida, os erros de arredondamento e truncamento podem sempre, em princípio, ser minorados ao torná-los arbitrariamente pequenos através de uma computação rigorosa e, muitas vezes, exaustiva.

"*As técnicas intervalares em substituição ao método clássico de estimativa de erro*", foram propostas por Moore[18] e Sunaga[37] nos anos 50, como uma alternativa confiável para resolver esse tipo de problema por considerar que "*a propagação do erro dos dados iniciais e a acumulação do erro de arredondamento em qualquer seqüência finita de operações aritméticas podem ser ambas, rigorosamente controladas, simplesmente pela utilização de uma aritmética intervalar*".

A matemática intervalar tem como objetivo fornecer esquemas computacionais de modo que, em se efetuando várias computações, os erros de arredondamento e truncamento se tornem o menor possível e sejam conhecidos, já que "*a amplitude de uma resposta intervalar é a medida exata dos erros causados pela imprecisão dos dados de entrada, pela propagação desses erros iniciais, pelos arredondamento e truncamento de dígitos no decorrer do processo computacional*" (Moore[18], 1966, p.10).

No próximo capítulo, será mostrado um estudo da aritmética intervalar de R. E. Moore, apresentando sua utilização como representação do cálculo numérico usual, fazendo o desdobramento das operações e propriedades básicas, como também, da topologia de IR, das funções intervalares, das seqüências intervalares (convergentes e divergentes, monótona e não monótona, etc.), do Método de Newton (versão real e intervalar), da aritmética intervalar complexa, de matrizes e vetores intervalares e sua transferência para matrizes reais e, ainda, a relação de pré-ordem de Moore, Kulisch-Miranker e Acióly, essa última como base para a dissertação proposta.

1.3. DOMÍNIOS CONTÍNUOS

Em 1991, Acióly[6] introduziu a noção de intervalo enquanto um conjunto de informação de números reais. Visto dessa maneira, um intervalo [a; b] passa a representar, não apenas um conjunto que contém um número real r, mas também um conjunto que informa sobre r. Essa noção fundamenta a prática de representar um número real por uma aproximação intervalar. Isto é, expressa por um relação de ordem $\sqsubseteq$ que denota uma ordem de informação. Por exemplo, a relação $[3; 4] \sqsubseteq [\pi; \pi]$ indica que [3; 4] informa sobre o irracional π. Além da noção de informação, Acióly[6] formalizou também a noção de aproximação intervalar através da noção de ***ordem de aproximação*** "$\ll$". Dessa maneira, a relação $[3; 4] \ll [\pi; \pi]$ significa que o intervalo [a; b] é uma aproximação intervalar do número real "r" com um erro máximo de (b – a)/2.

1.4. IGUALDADE LOCAL

As noções de ordens de aproximação e de informação para intervalos, deram impulso à noção de igualdade intervalar simples, introduzida por (Santiago[8], 1999) e baseada na teoria de D. Scott (Scott[26], 1977), que se sustenta no fato de que, dois ou mais intervalos consistentes são informações comuns, ou seja, informam sobre um mesmo número real. Essa idéia dá suporte a noção de igualdade simples, que se resume no fato de dois intervalos consistentes produzirem uma medida de igualdade. Por exemplo: os intervalos [3; 5] e [4; 7] têm uma medida de igualdade, denotada por $[\![[3; 5] = [4; 7]]\!] = (4, 5)$. Essa noção de igualdade veio a solucionar certas questões da matemática intervalar, como também, apontou para solução de outras.

Em 2000, Santiago[34] alterou o axioma da transitividade da igualdade simples e obteve a axiomática da igualdade local, a fim de resolver problemas na teoria intervalar resultante.

Baseado nessa noção de igualdade local, esta dissertação estende a noção da lógica equacional, e portanto de álgebra, para a lógica equacional local, a fim de obter uma teoria algébrica para conjuntos locais munidos de operações que preservam a igualdade local.

Este trabalho está estruturado nos seguintes capítulos:

O *capitulo 2*, apresenta um estudo das principais propriedades e operações da aritmética intervalar, a saber: aritmética intervalar básica (operações básicas); a topologia de IR; funções intervalares; seqüências intervalares; os métodos de Newton intervalar; aritmética intervalar complexa; matrizes e vetores intervalares e algumas relações de pré-ordem no conjunto IR.

O *capitulo 3*, apresenta a teoria dos domínios contínuos e sua aplicação à matemática intervalar, destacando-se ordens parciais, cpo's consistentes, ordens de aproximação e de informação, completação por corte de Dedekind, topologia usual da reta, topologia de Scott, além da aproximação e existência em intervalos.

O *capitulo 4*, apresentará a teoria das Σ-álgebras, classes equacionais e lógica equacional,

O *capitulo 5*, contém a proposta desta dissertação. Estende a noção de conjunto local para álgebra local, e introduz a teoria das Σ-álgebras locais, bem como uma proposta de uma lógica equacional local.

O *capitulo 6*, contém a conclusão e as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

2.1. MATEMÁTICA INTERVALAR

Apresentar-se-á nesta seção um estudo das definições básicas da matemática intervalar, do ponto de vista da aritmética intervalar clássica ou de Moore, tais como: a noção de intervalo, a definição do conjunto IR e das operações aritméticas em IR, a definição de igualdade entre intervalos, além do princípio da monotonicidade das operações e da inclusão da aritmética intervalar. O texto desta seção está baseado em (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 1997), (Kearfortt[3], 1996), (Moore[29], 1962) e (Moore[19], 1979). Além disso, vale salientar que apenas alguns teoremas, lemas e corolários estão formalmente demonstrados, outros, apenas referenciados.

2.1.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Definição 2.1.1.1: (*Intervalo de reais*)

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $x_1 \le x_2$. Então, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x_1 \le x \le x_2\}$ é um ***intervalo de extremos reais*** ou simplesmente um ***intervalo***, e será denotado por $\mathbf{X = [x_1, x_2]}$. Os pontos do conjunto dos intervalos de reais serão denotados por letras latinas maiúsculas.

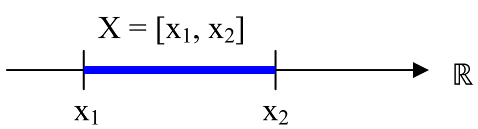

Figura 2.1.1.2: Um intervalo X na reta real $\mathbb{R}$

Exemplo:

- [0, 4], [5, 5], [-10, -4] e [-5, 5] são alguns exemplos de intervalos. Sendo que [5, 5] corresponde ao próprio número real 5.

Definição 2.1.1.3: (*Conjunto IR*)

Denota-se por IR o conjunto de todos os intervalos de reais, i.e., IR = $\{[x_1, x_2] / x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \leq x_2\}$.

Dessa maneira, para todo ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ com $x_1 \leq x_2$, pode-se associar um intervalo $[x_1, x_2] \in$ IR, e, obter assim, uma representação geométrica para IR.

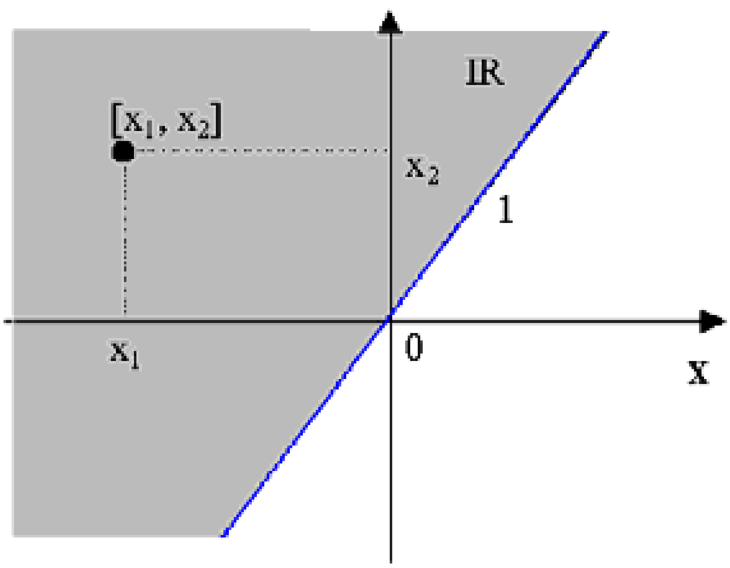

Figura 2.1.1.4: Representação geométrica de IR

Dessa forma, todo número real $x \in \mathbb{R}$ pode ser visto como um intervalo de IR. Para isso, denota-se os pontos $x \in \mathbb{R}$ como intervalos pontuais X = [x, x] $\in$ IR, por exemplo, os pontos da reta. Estes intervalos também são chamados ***"intervalos degenerados"***.

Desse ponto de visto, pode-se escrever a seguinte cadeia de inclusões:

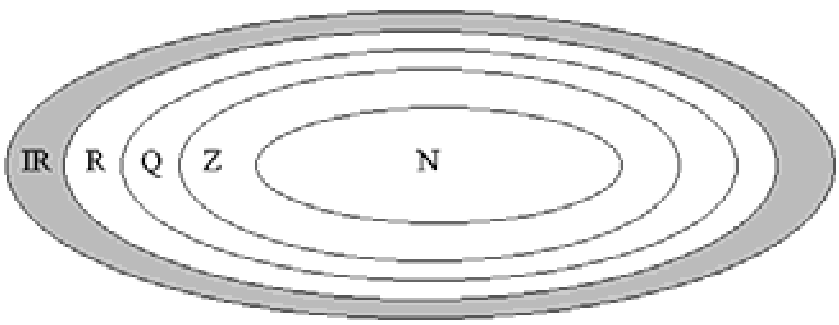

Figura 2.1.1.5: N $\subseteq$ Z $\subseteq$ Q $\subseteq$ $\mathbb{R}$ $\subseteq$ **IR**

Considerando cada intervalo da reta como um conjunto, a *noção de igualdade entre dois intervalos* é dada pela *noção de igualdade entre conjuntos,* ou seja,

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ e } \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Definição 2.1.1.6: (*Igualdade entre Intervalos*)

Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ dois intervalos de IR. Diz-se que A = B se, e somente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

Logo, dois intervalos são considerados iguais se eles forem iguais enquanto conjuntos.

Definição 2.1.1.7: (*Operações aritméticas em IR*)

Sejam A, B $\in$ IR, dois intervalos reais. As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão em IR são definidas por $A * B = \{a * b /\ a \in A,\ b \in B\}$, onde $* \in \{+, -, x, /\}$ é quaisquer das quatro operações aritméticas. Para a operação de divisão, $0 \notin B$.

Se ω é uma operação unária, então ωX é definida por $\omega X = \omega(X) = \{\omega(x)/\ x \in X\} = [\min\{\omega(x)/\ x \in X\}, \max\{\omega(x)/\ x \in X\}]$.

Teorema 2.1.1.8: (*Soma Intervalar*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 14)

Sejam A, B $\in$ IR dois intervalos de reais, com $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Então $A + B = [(a_1 + b_1); (a_2 + b_2)]$.

Demonstração: Sejam $a \in A$ e $b \in B$, onde A e B são intervalos de reais. Então, pela definição de intervalo, tem-se:

$$\begin{array}{lll} a \in A & \Rightarrow & a_1 \le a \le a_2 \\ b \in B & \Rightarrow & b_1 \le b \le b_2 \\ \hline & & a_1 + b_1 \le a + b \le a_2 + b_2 \end{array}$$

Assim, $(a + b) \in [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)] = A + B$, sempre que $a \in A$ e $b \in B$.

Exemplo:

Sejam A = [2, 4] e B = [6, 9]. Tem-se:

A + B = [2, 4] + [6, 9] = [(2 + 6), (4 + 9)] = **[8; 13]**.

Teorema 2.1.1.9: (*Propriedades da Soma*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 17)

Sejam A, B, C $\in$ IR intervalos de extremos racionais. Então, valem as seguintes propriedades:

1º) **Fechamento**: Se A, B $\in$ IR então A + B $\in$ IR;

2º) **Associatividade**: A + (B + C) = (A + B) + C;

3º) **Comutatividade**: A + B = B + A;

4º) **Elemento Neutro**: $\exists!$ 0 = [0; 0] $\in$ IR tal que A +0 = 0 + A = A.

Demonstração: Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ e $C = [c_1, c_2]$. Tem-se:

1º) A prova do fechamento da adição é imediato e já foi demonstrada na definição de soma intervalar.

2º) $\mathbf{A + (B + C)} = [a_1, a_2] + ([b_1, b_2] + [c_1, c_2]) = [a_1, a_2] + [(b_1 + c_1), (b_2 + c_2)] = [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)] = [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2] = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)] + [c_1, c_2] = ([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) + [c_1, c_2] = \mathbf{(A + B) + C}$;

3º) $\mathbf{A + B} = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)] = [(b_1 + a_1), (b_2 + a_2)] = \mathbf{B + A}$;

4º) $\mathbf{A + 0} = [a_1, a_2] + [0, 0] = [a_1 + 0, a_2 + 0] = [a_1, a_2] = \mathbf{A}$ e

$\mathbf{0 + A} = [0, 0] + [a_1, a_2] = [0 + a_1, 0 + a_2] = [a_1, a_2] = \mathbf{A}$.

Teorema 2.1.1.10: (*Pseudo Inverso Aditivo*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 14)

Seja A $\in$ IR um intervalo de reais, com $A = [a_1, a_2]$. Então $-A = [-a_2, -a_1]$.

Demonstração:

Seja a $\in$ A, onde A é um intervalo de reais. Então, pela definição de intervalo, tem-se:

$$
\begin{array}{lll}
a \in A & \Rightarrow & a_1 \le a \le a_2 \quad \therefore \\
(-1)A & \Rightarrow & -a_1 \ge -a \ge -a_2 \quad \therefore \\
\hline
 & & -a_2 \le -a \le -a_1
\end{array}
$$

Assim, $(-a) \in [-a_2, -a_1] = -A$, sempre que a $\in$ A.

Exemplo: Seja A = [4, 7]. Então -A = - [4, 7] = **[-7, -4]**.

Pode-se observar que o conjunto IR não possui inverso aditivo, i.e., nem sempre é possível achar um intervalo "- A" tal que A + (-A) = 0. Por exemplo, tomando A = [2, 5], tem-se:

A – A = [2, 5] - [2, 5] = [2, 5] + [-5, -2] = [-3, 3] $\neq$ [0, 0] = 0, mas **0 $\in$ [-1, 1]**, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 2.1.1.11: (0 $\in$ A – A) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 18)

Seja A um intervalo de extremos reais. Então, 0 $\in$ (A – A).

Demonstração: Dado A = $[a_1, a_2]$, como A $\in$ IR, segue que $a_1 \leq a_2$. Mas A – A = $[a_1, a_2]$ - $[a_1, a_2]$ = $[a_1, a_2]$ + $[-a_2, -a_1]$ = $[a_1 - a_2, a_2 - a_1]$. Como $a_1 \leq a_2$, segue que $a_1 - a_2 \leq 0$ e $a_2 - a_1 \geq 0$, ou seja, **0 $\in$ A – A.**

Teorema 2.1.1.12: (*Subtração Intervalar*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 14)

Sejam A, B $\in$ IR dois intervalos de reais, com A = $[a_1, a_2]$ e B = $[b_1, b_2]$. Então A - B = A + (- B) = $[a_1, a_2]$ + $[-b_2, -b_1]$ = $[(a_1 - b_2); (a_2 - b_1)]$.

Demonstração: Sejam a $\in$ A e b $\in$ B, onde A e B são intervalos de reais. Então, pela definição de intervalo, tem-se:

$$
\begin{array}{lll}
a \in A \;\Rightarrow & a_1 \leq a \leq a_2 & \\
b \in B \;\Rightarrow & b_1 \leq b \leq b_2 & \therefore \\
(-1)\,B & -b_1 \geq -b \geq -b_2 & \therefore \\
 & -b_2 \leq -b \leq -b_1 & \\
\hline
 & a_1 - b_2 \leq a - b \leq a_2 - b_1 &
\end{array}
$$

Assim, (a - b) $\in$ $[(a_1 - b_2), (a_2 - b_1)]$ = A + (- B), sempre que a $\in$ A e b $\in$ B.

Exemplo:

Sejam A = [2, 3] e B = [4, 5]. Então,

A - B = [2, 3] - [4, 5] = [2, 3] + (- [4, 5]) = [2, 3] + [-5, -4] = [2 – 5, 3 - 4] = **[-3, -1]** θ

Teorema 2.1.1.13: (*Multiplicação Intervalar*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 15)

Sejam A, B $\in$ IR dois intervalos de reais, com A = $[a_1, a_2]$ e B = $[b_1, b_2]$. Então,

$A \cdot B = [\min\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}, \max\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}]$.

Demonstração: A multiplicação intervalar é considerada fechada em IR, desde que $a \cdot b \in A \cdot B$, sempre que $a \in A$ e $b \in B$, i.e., $A \cdot B = [\min\{a \cdot b / a \in A, b \in B\}; \max\{a \cdot b / a \in A, b \in B\}]$. Por outro lado, para se obter o ***mínimo*** e o ***máximo*** deste conjunto produto, deve-se considerar a função contínua $f(x, y) = x \cdot y$, definida no domínio $A \times B$. Como A e B são intervalos de reais, que por sua vez são compactos (fechados e limitados) e f é contínua, então existe um ***mínimo*** e um ***máximo***, que devem estar situados nos vértices do retângulo $A \times B$. Para provar que não existe extremo no interior de $A \times B$, deriva-se f parcialmente e obtém-se a equação: $\mathbf{f_{xx}} \cdot \mathbf{f_{yy}} - \mathbf{f_{xy}^2} = -1, \forall (x, y) \in A \times B$. Dessa maneira, o **max** $\in \{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}$ e o **min** $\in \{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}$. E portanto, $A \times B = [\min\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}, \max\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}]$.

Exemplo:

Sejam $A = [-2, 3]$ e $B = [-4, 5]$. Então,

$A \times B = [-2, 3] \times [-4, 5] = [\min\{(-2) \cdot (-4), (-2) \cdot 5, 3 \cdot (-4), 3 \cdot 5\}, \max\{(-2) \cdot (-4), (-2) \cdot 5, 3 \cdot (-4), 3 \cdot 5\}] = [\min\{8, -10, -12, 15\}; \max\{8, -10, -12, 15\}] = \mathbf{[-12, 15]}$.

Teorema 2.1.1.14: (*Propriedades do Produto*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 18)

Sejam $A, B, C \in IR$ intervalos de reais. Então, valem as seguintes propriedades:

1º) **Fechamento**: Se $A, B \in IR$, então $A\ B \in IR$;

2º) **Associatividade**: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

3º) **Comutatividade**: $A \cdot B = B \cdot A$;

4º) **Elemento Neutro**: $\exists!\ 1 = [1; 1] \in IR$ tal que $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$

5º) **Subdistributividade**: $A \cdot (B + C) \subseteq (A \cdot B) + (A \cdot C)$.

Demonstração: Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ e $C = [c_1, c_2]$. Então:

1º) A prova do fechamento da adição é imediato e já foi demonstrada na definição de multiplicação intervalar.

2º) $\mathbf{A \times (B \times C)} = \{z = \boldsymbol{y} \cdot c / y \in (A \times B), c \in C\} = \{z = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot c / a \in A, b \in B, c \in C\} = \{z = a \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) / a \in A, b \in B, c \in C\} = \{z = a \cdot \boldsymbol{x} / a \in A, \boldsymbol{x} \in (B \cdot C)\} = \mathbf{(A \cdot B) \cdot C}$**;**

3º) $\mathbf{A \times B} = [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}, \max\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}] = [\min\{b_1 \cdot a_1, b_1 \cdot a_2, b_2 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2\}, \max\{b_1 \cdot a_1, b_1 \cdot a_2, b_2 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2\}] = \mathbf{B \cdot A}$**;**

4º) $\mathbf{A}\times\mathbf{1}$ = $[a_1, a_2]\cdot[1, 1] = [\min\{a_1\cdot 1, a_1\cdot 1, a_2\cdot 1, a_2\cdot 1\}, \max\{a_1\cdot 1, a_1\cdot 1, a_2\cdot 1, a_2\cdot 1\}] = [a_1, a_2] = \mathbf{A}$;

$\mathbf{1}\times\mathbf{A}$= $[1, 1]\cdot[a_1, a_2] = [\min\{1\cdot a_1, 1\cdot a_2, 1\cdot a_1, 1\cdot a_2\}, \max\{1\cdot a_1, 1\cdot a_2, 1\cdot a_1, 1\cdot a_2\}] = [a_1, a_2] = \boldsymbol{A}$;

5º) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ = $[a_1, a_2] \times ([b_1, b_2] + [c_1, c_2]) = [a_1, a_2] \times [b_1 + c_1, b_2 + c_2] = [\min\{a_1\cdot(b_1 + c_1), a_1\cdot(b_2 + c_2), a_2\cdot(b_1 + c_1), a_2\cdot(b_2 + c_2)\}, \max\{a_1\cdot(b_1 + c_1), a_1\cdot(b_2 + c_2), a_2\cdot(b_1 + c_1), a_2\cdot(b_2 + c_2) \}] = [\min\{a_1\cdot b_1 + a_1\cdot c_1, a_1\cdot b_2 + a_1\cdot c_2, a_2\cdot b_1 + a_2\cdot c_1, a_2\cdot b_2 + a_2\cdot c_2\}, \max\{ a_1\cdot b_1 + a_1\cdot c_1, a_1\cdot b_2 + a_1\cdot c_2, a_2\cdot b_1 + a_2\cdot c_1, a_2\cdot b_2 + a_2\cdot c_2\}] = [\min_{(\text{soma dos produtos})}, \max_{(\text{soma dos produtos})}]$;

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$ = $([a_1, a_2]\times[b_1, b_2]) + ([a_1, a_2]\times [c_1, c_2]) = [\min\{a_1\cdot b_1, a_1\cdot b_2, a_2\cdot b_1, a_2\cdot b_2\}, \max\{a_1\cdot b_1, a_1\cdot b_2, a_2\cdot b_1, a_2\cdot b_2\}] + [\min\{a_1\cdot c_1, a_1\cdot c_2, a_2\cdot c_1, a_2\cdot c_2\}, \max\{ a_1\cdot c_1, a_1\cdot c_2, a_2\cdot c_1, a_2\cdot c_2\}] = [\min_{AB} + \min_{AC}, \max_{AB} + \max_{AC}]$.

Observa-se que $(\min_{AB} + \min_{AC},) \leq \min_{(\text{soma dos produtos})}$ e $(\max_{AB} + \max_{AC}) \geq \max_{(\text{soma dos produtos})}$. Dessa maneira, pode afirmar que $A\times(B + C) \subseteq (A \times B) + (A \times C)$. θ

Teorema 2.1.1.15: (*Pseudo Inverso Multiplicativo*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 15)

Seja $A \in IR$ um intervalo de reais, com $A = [a_1, a_2]$ e $0 \notin A$.

Então $A^{-1} = \dfrac{1}{A} = \left[\dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_1}\right]$.

Demonstração: Pela definição de intervalo e das operações aritméticas intervalares, tem-se:

Para $a \in A$ e $a \neq 0$ $\Rightarrow$ $a_1 \leq a \leq a_2$ $\therefore$ $\dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{a_1}$ e $\dfrac{1}{a_2} \leq \dfrac{1}{a}$ $\therefore$ $\dfrac{1}{a_2} \leq \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{a_1}$

Logo $\left(\dfrac{1}{a}\right) \in \left[\dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_1}\right] = \dfrac{1}{A}$, sempre que $a \in A$.

Exemplos:

a) Seja $A = [2, 3]$. Então $A^{-1} = \dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{[2, 3]} = \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$

b) Seja $A = [-3, -2]$. Então $A^{-1} = \dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{[-3, -2]} = \left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right]$.

Observa-se mais uma vez que o conjunto IR não possui inverso multiplicativo, i.e., nem sempre é possível achar $A \times (A^{-1}) = 1$. Por exemplo, se $A = [3, 4]$, então o inverso multiplicativo é:

$A \cdot (A^{-1}) = [3, 4] \cdot ([3, 4]^{-1}) = [3, 4] / [3, 4] = \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right] \neq [1, 1] = 1.$

Mas $1 \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 2.1.1.16: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 19)

Seja A um intervalo, tal que $\mathbf{0 \notin A}$. Então, $\mathbf{1 \in A/A}$.

Demonstração: Dado $A = [a_1, a_2]$, como $A \in IR$ segue que $a_1 \leq a_2$. Mas $A/A = [a_1, a_2] / [a_1, a_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/a_2, 1/a_1] = [a_1/a_2, a_2/a_1]$. Como $a_1 \leq a_2$ segue que $a_1/a_2 \leq 1$ e $a_2/a_1 \geq 1$, logo, $1 \in A/A$.

Teorema 2.1.1.17: (*Divisão Intervalar*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 16)

Sejam $A, B \in IR$ dois intervalos de reais, com $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ e $0 \notin B$. Então,

$$\frac{A}{B} = A.B^{-1} = \left[\min\left\{\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right\},\ \max\left\{\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right\}\right] \text{ com } 0 \notin [b_1, b_2].$$

Exemplo:

Sejam $A = [2, 3]$ e $B = [4, 5]$. Então,

$A / B = [2, 3] / [4, 5] = [\min\{2/5, 2/4, 3/5, 3/4\},\ \max\{2/5, 2/4, 3/5, 3/4\}] = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{4}\right].$

Afirmar que o conjunto IR não tem divisores zero significa dizer que, dados quaisquer dois intervalos $A, B \in IR$ tais que $A \cdot B = [0, 0]$, então A é zero ou B é zero, conforme mostra o teorema abaixo.

Teorema 2.1.1.18: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 19)

Se $A, B \in IR$ e $A \cdot B = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

Demonstração: Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Como, por hipótese, $A \cdot B = 0$, seque que $A \cdot B = [\min\{a_1 \cdot b_1,\ a_1 \cdot b_2,\ a_2 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2\},\ \max\{a_1 \cdot b_1,\ a_1 \cdot b_2,\ a_2 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2\}] = [0,\ 0] \Leftrightarrow$

$\min\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\} = 0$ e $\max\{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\} = 0$. Logo, pode-se concluir que $A = [0, 0]$ ou $B = [0, 0]$.

Analisando os sinais dos extremos dos intervalos, pode-se disponibilizar de maneira otimizada, as operações de multiplicação e divisão sobre os intervalos, para fins de implementação em computadores, conforme as tabelas 2.1.1.19 e 2.1.1.20 para multiplicação e divisão, respectivamente.

Dados os intervalos $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$, otimizar os cálculos das seguintes operações:

Tabela 2.1.1.19: Operação de multiplicação (Moore[19], 1979, p. 12)

Ordem	Intervalos		Multiplicação
1	$a_1 \geq 0$ e $b_1 \geq 0$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$
2	$a_1 \geq 0$ e $b_1 < 0 \leq b_2$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$
3	$a_1 \geq 0$ e $b_1 < 0$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_2 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2]$
4	$a_1 < 0 \leq a_2$ e $b_1 \geq 0$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_2]$
5	$a_1 < 0 \leq a_2$ e $b_1 \leq 0 \leq b_2$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [\min\{a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1\}, \max\{a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2\}]$
6	$a_1 < 0 \leq a_2$ e $b_2 < 0$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2]$
7	$a_2 < 0$ e $b_1 \geq 0$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1]$
8	$a_2 < 0$ e $b_1 < 0 \leq b_2$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_1]$
9	$a_2 < 0$ e $b_2 < 0$	$\Rightarrow$	$A \cdot B = [a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_1]$

Exemplo:

Para calcular $[-2, 3] \cdot [-4, -5]$, usa-se a regra número 6 da multiplicação. Então,

$[-2, 3] \cdot [-4, -5] = [3 \cdot (-5), (-2) \cdot (-5)] =$ **$[-15, 10]$**.

Tabela 2.1.1.20: Operação de divisão (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 17)

Ordem	Intervalos		Multiplicação
1	$a_1 > 0$ e $b_1 > 0$	$\Rightarrow$	$A/B = [a_1/b_2, a_2/b_1]$
2	$a_1 > 0$ e $0 \in [b_1; b_2]$	$\Rightarrow$	$A/B =$ Não definido
3	$a_1 > 0$ e $b_2 < 0$	$\Rightarrow$	$A/B = [a_2/b_2, a_1/b_1]$
4	$a_1 < 0 < a_2$ e $b_1 > 0$	$\Rightarrow$	$A/B = [a_1/b_1, a_2/b_1]$

5	$a_1 < 0 < a_2$ e $0 \in [b_1; b_2]$	$\Rightarrow$	A/B = Não definido
6	$a_1 < 0 < a_2$ e $b_2 < 0$	$\Rightarrow$	$A/B = [a_2/b_2, a_1/b_2]$
7	$a_2 < 0$ e $b_1 > 0$	$\Rightarrow$	$A/B = [a_1/b_1, a_2/b_2]$
8	$a_2 < 0$ e $0 \in [b_1; b_2]$	$\Rightarrow$	A/B = Não definido
9	$a_2 < 0$ e $b_2 < 0$	$\Rightarrow$	$A/B = [a_2/b_1, a_1/b_2]$

Exemplo:

Para calcular [-4, -2] / [1, 2], usa-se a regra 7 da divisão. Então,

[-4, -2] / [1, 2] = [-4/1, -2/2] = **[-4, -1]**.

Teorema 2.1.1.21: (*Inclusão monotônica*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 19)

Sejam A, B, C, D $\in$ IR intervalos de extremos reais, tais que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$. Então, valem as seguintes propriedades:

1º) $A + B \subseteq C + D$;

2º) $-A \subseteq -C$;

3º) $A - B \subseteq C - D$;

4º) $A \cdot B \subseteq C \cdot D$;

5º) $1/A \subseteq 1/C$, sempre que $0 \notin A$ e $0 \notin C$;

6º) $A / B \subseteq C / D$, sempre que $0 \notin B$ e $0 \notin D$.

Demonstração: Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$, $D = [d_1, d_2]$ e $* \in \{+, -, x, /\}$. Por hipótese, $A \subseteq C$, ou seja, $\mathbf{c_1} \leq a_1 \leq a_2 \leq \mathbf{c_2}$. Da mesma forma, $B \subseteq D$, ou seja, $\mathbf{d_1} \leq b_1 \leq b_2 \leq \mathbf{d_2}$. Assim, $A * B = \{(a * b)/\ a\in A,\ b\in B\} \subseteq \{(c * d)/\ c\in C,\ d\in D\} = C * D$. As demonstrações unárias são análogas.

Teorema 2.1.1.22: (*Propriedades da inclusão*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 20)

Sejam A, B, C $\in$ IR intervalos de reais. Então, valem as seguintes propriedades:

1º) $A + \mathbf{B} = A + \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B = C}$;

2º) $\mathbf{B} - A = \mathbf{C} - A \Rightarrow \mathbf{B = C}$;

3º) $A + \mathbf{B} \subseteq A + \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$;

4º) $A\cdot 0 = 0\cdot A = [0, 0]$;

5º) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ vale que $(\alpha\cdot\beta)\cdot A = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$;

6º) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ vale que $(\alpha + \beta)\cdot A \subseteq (\alpha\cdot A) + (\beta\cdot A)$;

7º) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ vale que $\alpha\cdot(B + C) = (\alpha\cdot B) + (\alpha\cdot C)$.

Demonstração: Sejam os intervalos $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ e as constantes α e β. Então, tem-se:

1º) $A + \mathbf{B} = A + \mathbf{C} \therefore \mathbf{[a_1, a_2]} + [b_1, b_2] = \mathbf{[a_1, a_2]} + [c_1, c_2] \Rightarrow [b_1, b_2] = [c_1, c_2] \therefore \mathbf{B = C}$;

2º) $\mathbf{B} - A = \mathbf{C} - A \therefore [b_1, b_2] - \mathbf{[a_1, a_2]} = [c_1, c_2] - \mathbf{[a_1, a_2]} \Rightarrow [b_1, b_2] = [c_1, c_2] \therefore \mathbf{B = C}$**;**

3º) $A + \mathbf{B} \subseteq A + \mathbf{C} \therefore \mathbf{[a_1, a_2]} + [b_1, b_2] \subseteq \mathbf{[a_1, a_2]} + [c_1, c_2] \Rightarrow [b_1, b_2] \subseteq [c_1, c_2] \therefore \mathbf{B \subseteq C}$**;**

4º) $A\cdot 0 = [a_1, a_2]\cdot[0, 0] = [0, 0]$ e $0\cdot A = [0, 0]\cdot[a_1, a_2] = [0, 0]$;

5º) $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ vale que $(\alpha\cdot\beta)\cdot A = (\alpha\cdot\beta)\cdot[a_1, a_2] = \alpha\cdot(\beta\cdot[a_1, a_2]) = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$;

6º) $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ vale que $(\alpha + \beta)\cdot A = (\alpha + \beta)\cdot[a_1, a_2] \subseteq (\alpha\cdot[a_1, a_2]) + (\beta\cdot[a_1, a_2]) = (\alpha\cdot A) + (\beta\cdot A)$;

7º) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ vale que $\alpha\cdot(B + C) = \alpha\cdot([b_1, b_2] + [c_1, c_2]) = (\alpha\cdot[b_1, b_2]) + (\alpha\cdot[c_1, c_2]) = (\alpha\cdot B) + (\alpha\cdot C)$.

Definição 2.1.1.23: (*Intervalo Simétrico*) (Moore[19], 1979, p. 14)

Seja $A \in IR$ um intervalo. Diz-se que A é um intervalo simétrico se $-A = A$. Os extremos são eqüidistantes em relação a zero.

Exemplo:

$[-4, 4]$, $[0, 0]$, $[-\pi, \pi]$ são exemplos de intervalos simétricos.

Teorema 2.1.1.24: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 20)

Todo intervalo simétrico é da forma $[-a, a]$, com $a \geq 0$.

Demonstração: Seja $A = [a_1, a_2] \in IR$ um intervalo. Como por hipótese, A é simétrico, segue que $-A = A$. Assim, tem-se $-A = [-a_2, -a_1] = [a_1, a_2] = A \Leftrightarrow a_1 = -a_2$ e $a_2 = -a_1$. Fazendo $a_2 = a$, tem-se $a = -a_1 \therefore a_1 = -a$. Logo, A é simétrico se, e somente se, $A = [-a, a]$, com $a \geq 0$.

Corolário 2.1.1.25: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 20)

Se $A \in IR$ é um intervalo simétrico, então $A = |A|\cdot[-1, 1]$.

Demonstração: Seja $A = [-a, a] \in IR$ um intervalo simétrico. Então $|[-a, a]|\cdot[-1, 1] = \max\{|-a|, |a|\}\cdot[-1, 1] = a\cdot[-1, 1] = [-a, a] = A$.

Teorema 2.1.1.26: (*Propriedades*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 20)

Sejam A, X, Y $\in$ IR intervalos de reais, com X e Y simétricos. Então, valem as seguintes propriedades:

1º) $A + X = A - X$;

2º) $A \cdot X = |A| \cdot X$;

3º) $A \cdot X = |A| \cdot |X| \cdot [-1, 1]$;

4º) $A \cdot (X \pm Y) = (A \cdot X) \pm (A \cdot Y)$.

Demonstração: Direto das definições acima sobre intervalo simétrico.

A seguir, serão definidas as operações de interseção, união e união convexa de intervalos sobre o conjunto IR.

Definição 2.1.1.27: (*Interseção de dois Intervalos*) (Moore[19], 79, p. 10)

Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ dois intervalos. A **interseção** dos intervalos A e B é dada pelo intervalo $A \cap B = [\max\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}]$, caso $\max\{a_1, b_1\} \leq \min\{a_2, b_2\}$. Caso $\max\{a_1, b_1\} > \min\{a_2, b_2\}$ então $A \cap B = \varnothing$.

A figura abaixo interpreta geometricamente a operação de **interseção de intervalos** na reta real:

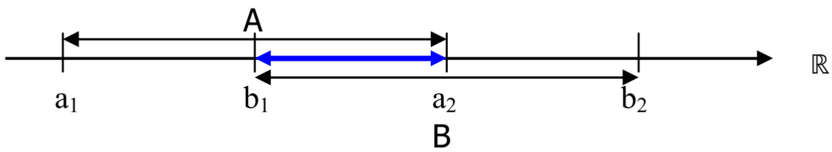

Figura 2.1.1.28: *Interseção intervalar* em ℝ.

Exemplos:

1º) $[2, 5] \cap [3, 8] = [\max\{2, \mathbf{3}\}, \min\{\mathbf{5}, 8\}] = [\mathbf{3, 5}]$;

2º) $[3, 8] \cap [-1, 10] = [\max\{\mathbf{3}, -1\}, \min\{\mathbf{8}, 10\}] = [\mathbf{3, 8}]$;

3º) $[-3, 2] \cap [2, 5] = [\max\{-3, \mathbf{2}\}, \min\{\mathbf{2}, 5\}] = [\mathbf{2, 2}]$;

4º) $[-3, 2] \cap [3, 8] = [\max\{-3, \mathit{3}\}, \min\{\mathit{2}, 8\}] = \varnothing$.

Teorema 2.1.1.29: (*Propriedade*) (Oliveira; Diverio, Claudio[2], 97, p. 21)

Sejam A, B, C, D $\in$ IR. Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$, então $A \cap B \subseteq C \cap D$.

Exemplo:

Sejam A = [3, 5], B = [-1, 4], C = [2, 8] e D = [-1, 6]. Assim, se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$, então, $A \cap B = [3, 4]$, $C \cap D = [2, 6]$ e $[3, 4] \subseteq [2, 6]$.

Definição 2.1.1.30: (*União de dois Intervalos*) (Moore[19], 79, p. 10)

Sejam $A = [a_1; a_2]$ e $B = [b_1; b_2]$ dois intervalos tais que $A \cap B \neq \varnothing$. A **união** dos intervalos A e B é dada pelo intervalo $A \cup B = [\min\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}]$.

A figura abaixo representa a operação de **união de intervalos** na reta real.

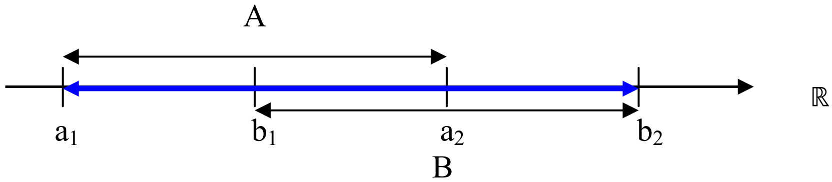

Figura 2.1.1.31: *União intervalar* em ℝ**.**

Exemplos:

a) $[2, 5] \cup [3, 8] = [\min\{\mathbf{2}, 3\}, \max\{5, \mathbf{8}\}] = [\mathbf{2, 8}]$;

b) $[3, 8] \cup [-1, 10] = [\min\{3, \mathbf{-1}\}, \max\{8, \mathbf{10}\}] = [\mathbf{-1, 10}]$;

c) $[-3, 2] \cup [2, 5] = [\min\{\mathbf{-3}, 2\}, \max\{2, \mathbf{5}\}] = [\mathbf{-3, 5}]$;

d) $[-3, 2] \cup [3, 8] = \nexists$, pois $[-3, 2] \cap [3, 8] = \varnothing$.

Definição 2.1.1.32: (*União convexa de dois Intervalos*)

Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ dois intervalos quaisquer. A **união convexa** dos intervalos A e B é dada pelo intervalo $\overline{\mathbf{A \cup B}} = [\min\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}]$.

Nesta união, a interseção entre os dois intervalos pode ser vazia. A união é o menor diâmetro que contém os intervalos operados.

A figura abaixo mostra geometricamente a operação de **união convexa** na reta real:

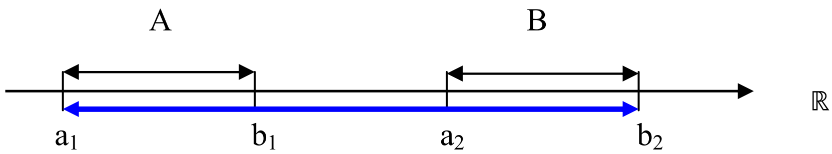

Figura 2.1.1.33: *União intervalar convexa* em ℝ**.**

Exemplos:

a) $\overline{[2,5]\cup[3,8]}$ = [min{**2**, 3}, max{5, **8**}] = [**2, 8**];

b) $\overline{[3,8]\cup[-1,10]}$ = [min{3, **-1**}, max{8, **10**}] = [**-1, 10**];

c) $\overline{[-3,2]\cup[2,5]}$ = [min{**-3**, 2}, max{2, **5**}] = [**-3, 5**];

d) $\overline{[-3,2]\cup[3,8]}$ =[min{**-3**, 3}, max{2, **8**}] = [**-3, 8**].

2.1.2. A TOPOLOGIA DE IR

Apresentar-se-á neste item, algumas propriedades topológicas do espaço IR; as quais estão baseadas, principalmente, nas noções de proximidade e limite, como por exemplo, a distância.

Definição 2.1.2.1: (*Distância entre dois intervalos*) (Moore[19], 79, p. 33)
Sejam A = $[a_1, a_2]$ e B = $[b_1, b_2]$ dois intervalos. A **distância** entre A e B é dada pelo número real não negativo $\delta = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$, i.e., ***é a "maior distância em módulo entre os extremos."***

<u>Notação</u>: $d(A, B) = d([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \geq 0$.

A figura abaixo interpreta geometricamente a ***distância entre dois intervalos***, na reta real.

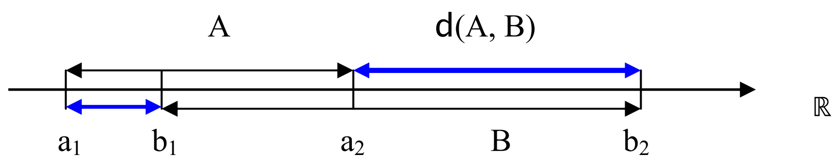

Figura 2.1.2.2: *Distância* entre dois intervalos em ℝ**.**

Corolário 2.1.2.3: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 24)
A = B se, e somente se, $d(A, B) = 0$.

Teorema 2.1.2.4: (*Espaço métrico completo*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 24)
O conjunto IR dos intervalos de extremos reais, munido da função $d(X, Y)$, é um espaço métrico completo.

A função distância "d" estabelece uma métrica sobre IR. Logo, valem as seguintes propriedades:

1º) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \quad \forall A, B \in IR$;
2º) $d(A, B) = d(B, A), \quad \forall A, B \in IR$;
3º) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C), \quad \forall A, B, C \in IR$.

Exemplos:
Sejam A = [2, 5], B = [-2, -1] e C = [-3, 2]. Então:
1º) $d(A, A) = \max\{|2-2|, |5-5|\} = \max\{|0|, |0|\} = 0$
2º) $d(A, B) = \max\{|2-(-2)|, |5-(-1)|\} = \max\{|4|, |6|\} = 6$
3º) $d(B, C) = \max\{|(-2)-(-3)|, |(-1)-2|\} = \max\{|1|, |-3|\} = 3$
4º) $d(A, C) = \max\{|2-(-3)|, |5-2|\} = \max\{|5|, |3|\} = 5$
5º) $d(A, B) + d(B, C) = 6 + 3 = 9$

Logo, a $d(A, C) = 5 \leq d(A, B) + d(B, C) = 9$.

Definição 2.1.2.5: (*Módulo de um intervalo*)

Seja A = $[a_1; a_2]$ um intervalo. O **módulo** de A é o número real não negativo $\mu = d(A, 0)$, i.e., é a ***"maior distância em módulo de um dos extremos a zero."***

Notação: $|A| = |[a_1, a_2]| = d(A, 0) = \max\{|a_1|, |a_2|\} \geq 0$.

Geometricamente, o módulo de um intervalo é o comprimento do maior segmento que une cada um dos extremos do intervalo à origem, como mostram as figuras abaixo.

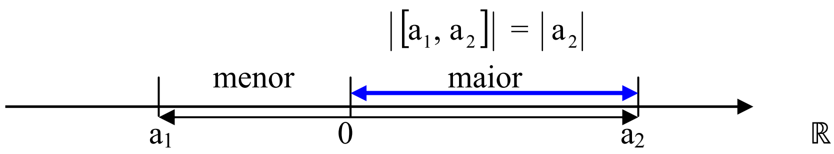

Figura 2.1.2.6: *Módulo* de um intervalo em $\mathbb{R}$.

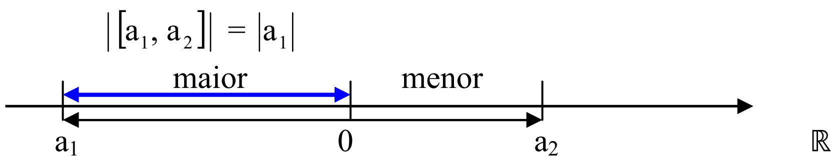

Figura 2.1.2.7: *Módulo* de um intervalo em $\mathbb{R}$.

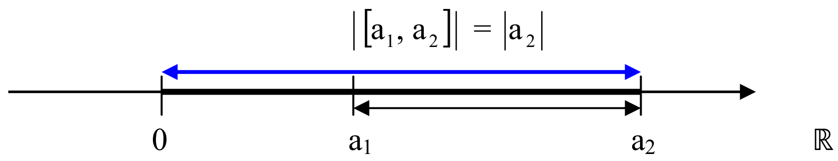

Figura 2.1.2.8: *Módulo* de um intervalo em ℝ.

Teorema 2.1.2.9: (*Propriedades*)

1º) $|X| = 0 \Leftrightarrow X = 0$;

2º) $|X + Y| \leq |X| + |Y|$;

3º) $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$.

Demonstração: Sejam $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Então,

1º) $|\mathbf{A}| = |[a_1, a_2]| = \max\{|a_1|, |a_2|\} = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$ e $a_2 = 0 \Rightarrow A = [0, 0]$;

2º) $|A + B| = |[a_1, a_2] + [b_1, b_2]| = |[(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)]| = \max\{|(a_1 + b_1)|, |(a_2 + b_2)|\} \leq$

$|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |[a_1, a_2]| + |[b_1, b_2]| = \max\{|a_1|, |a_2|\} + \max\{|b_1|, |b_2|\}$

3º) $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2]| = |\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}| =$

$\max\{|\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}|, |\max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}|\}$.

$|[a_1, a_2]| \cdot |[b_1, b_2]| = \max\{|a_1|, |a_2|\} \cdot \max\{|b_1|, |b_2|\} =$

$\max\{|\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}|, |\max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}|\}$.

Exemplos:

Sejam $A = [2, 5]$, $B = [-2, -1]$. Então, Tem-se:

1º) $|A| = \max\{|2|, |5|\} = 5$;

2º) $|B| = \max\{|-2|, |-1|\} = 2$;

3º) $|A + B| = |[2 + (-2), 5 + (-1)]| = |[0; 4]| = \max\{|0|, |4|\} = 4$;

4º) $|A| + |B| = 5 + 2 = 7$;

5º) $|A \cdot B| = |[\min\{2\cdot(-2), 2\cdot(-1), 5\cdot(-2), 5\cdot(-1)\}, \max\{2\cdot(-2), 2\cdot(-1), 5\cdot(-2), 5\cdot(-1)\}]| =$

$|[-10, -2]| = \max\{|-10|, |-2|\} = 10$

6º) $|A| \cdot |B| = 5 \cdot 2 = 10$.

Teorema 2.1.2.10: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 26)

Sejam A, B, C, D $\in$ IR. Então, valem as seguintes propriedades:

1º) $d(A + B, A + C) = d(B, C)$;

2º) $d(A \cdot B, A \cdot C) \leq |\mathbf{A}| \cdot d(B, C)$;

3º) $d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$;

4º) $d(A \cdot B, A \cdot C) \leq |\mathbf{B}| \cdot d(A, C) + |\mathbf{C}| \cdot d(B, D)$;

5º) $d(A, B) \leq |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot d\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right)$, se $0 \notin A$, $0 \notin B$;

6º) $A \subseteq B \Rightarrow |\mathbf{A}| \leq |\mathbf{B}|$;

7º) $|\mathbf{X}^{\mathbf{n}}| = |\mathbf{X}|^{\mathbf{n}}$.

Demonstração: Sejam $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ e $D = [d_1, d_2]$.

1º) $d(A + B, A + C) = d\left([a_1, a_2] + [b_1, b_2], [a_1, a_2] + [c_1, c_2]\right) =$

$$d\left([a_1 + b_1, a_2 + b_2], [a_1 + c_1, a_2 + c_2]\right) = \max\left\{|(a_1 + b_1) - (a_1 + c_1)|, |(a_2 + b_2) - (a_2 + c_2)|\right\}$$

$$= \max\left\{|b_1 - c_1|, |b_2 - c_2|\right\} = d(B, C).$$

4º) $d(A \cdot B, A \cdot C) \leq d(A \cdot B, B \cdot C) + d(B \cdot C, C \cdot D) = d(B \cdot A, B \cdot C) + d(C \cdot B, C \cdot D) \leq |\mathbf{B}| \cdot d(A, C) + |\mathbf{C}| \cdot d(B, D)$;

5º) Sejam $A = [a_1; a_2]$ com $0 \notin A$ e $B = [b_1; b_2]$ com $0 \notin B$.

Daí, $\frac{1}{\mathbf{A}} = \frac{1}{[a_1, a_2]} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right]$ e $\frac{1}{\mathbf{B}} = \frac{1}{[b_1, b_2]} = \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right]$.

Assim,

$$d\left(\frac{1}{\mathbf{A}}, \frac{1}{\mathbf{B}}\right) = \max\left\{\left|\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2}\right|, \left|\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}\right|\right\} = \max\left\{\frac{|b_2 - a_2|}{|a_2 \cdot b_2|}, \frac{|b_1 - a_1|}{|a_1 \cdot b_1|}\right\} =$$

$$\max\left\{\frac{|a_2 - b_2|}{|a_2 \cdot b_2|}, \frac{|a_1 - b_1|}{|a_1 \cdot b_1|}\right\} = \max\left\{\frac{1}{|a_2 \cdot b_2|} \cdot |a_2 - b_2|, \frac{1}{|a_1 \cdot b_1|} \cdot |a_1 - b_1|\right\} \geq$$

$$\max\left\{\frac{1}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|} \cdot |\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2|, \frac{1}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|} \cdot |\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1|\right\} = \frac{1}{|A| \cdot |B|} \cdot \max\{|a_2 - b_2|, |a_1 - b_1|\} =$$

$$\frac{1}{|A| \cdot |B|} \cdot \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} = \frac{1}{|A| \cdot |B|} \cdot d(A,B).$$

Daí, $d\left(\frac{1}{\mathbf{A}}, \frac{1}{\mathbf{B}}\right) \geq \frac{d(A,B)}{|A| \cdot |B|}$ $\therefore$ $d(A, B) \leq |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot d\left(\frac{1}{\mathbf{A}}, \frac{1}{\mathbf{B}}\right)$.

As outros propriedades são mostradas através dos exemplos abaixo.

Exemplos:

Sejam A = [2, 5], B = [1, 4], C = [-1, 4] e D = [0, 4]. Então,

a) $d(A + B, A + C) = d([3, 9], [1, 9]) = \max\{|3 - 1|, |9 - 9|\} = \max\{|2|, |0|\} = 2$

b) $d(B, C) = d([1; 4], [-1; 4]) = \max\{|1 - (-1)|, |4 - 4|\} = \max\{|2|, |0|\} = 2$

c) $|A| \cdot d(B, C) = \max\{|2|, |5|\} \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$

d) $d(A + B, C + D) = d([3; 9], [-1; 8]) = \max\{|3 + 1|, |9 - 8|\} = \max\{|4|, |1|\} = 4$

e) $d(A, C) + d(B, D) = \max\{|2 + 1|, |5 - 4|\} + \max\{|1 - 0|, |4 - 4|\} = \max\{|3|, |1|\} + \max\{|1|, |0|\} = 3 + 1 = 4.$

Definição 2.1.2.11: (*Diâmetro de um intervalo*) (Moore[19], 1979, p. 10)

Seja $A = [a_1, a_2]$ um intervalo. O **diâmetro** de A é um número real não negativo.

Notação: $\text{diam}(A) = \text{diam}([a_1, a_2]) = a_2 - a_1 \geq 0.$

Geometricamente, o diâmetro de um intervalo é o comprimento do segmento que une os extremos do intervalo:

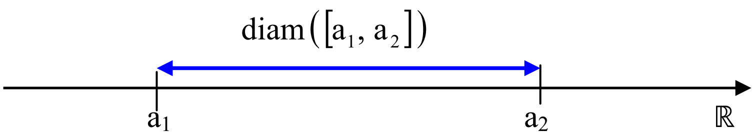

Figura 2.1.2.12: *Diâmetro* de um intervalo em ℝ.

Exemplos:

Sejam A = [2, 5], B = [-2, -1], C = [-3, 2] e D = [5, 5]. Então, tem-se:

1º) diam(A) = 5 – 2 = 3

2º) diam(B) = (-1) – (-2) = -1 + 2 = 1

3º) diam(C) = 2 – (-3) = 2 + 3 = 5

4º) diam(D) = 5 – 5 = 0.

Definição 2.1.2.13: (*Ponto médio de um intervalo*) (Moore[19], 79, p. 10)

Seja $A = [a_1; a_2]$ um intervalo. O **ponto médio** de A é dado pelo número real $m = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

<u>Notação</u>: $\mathrm{med}(A) = \mathrm{med}\left([a_1, a_2]\right) = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$.

A figura abaixo mostra geometricamente o ***ponto médio de um intervalo*** em $\mathbb{R}$:

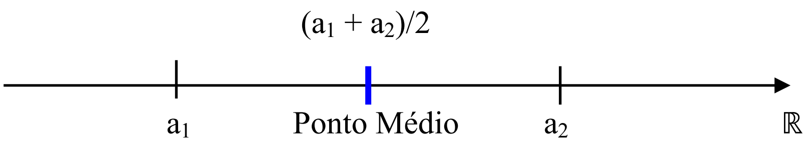

Figura 2.1.2.14: *Ponto médio* de um intervalo em $\mathbb{R}$**.**

Exemplos:

Sejam A = [2, 6], B = [-2, 0], C = [-3, 3], D = [-3, -1] e E = [5, 5]. Então, tem-se:

1º) $\mathrm{med}(A) = \dfrac{2+6}{2} = 4$

2º) $\mathrm{med}(B) = \dfrac{(-2)+0}{2} = -1$

3º) $\mathrm{med}(C) = \dfrac{(-3)+3}{2} = 0$

4º) $\mathrm{med}(D) = \dfrac{(-3)+(-1)}{2} = -2$

5º) $\mathrm{med}(E) = \dfrac{5+5}{2} = 5$.

2.1.3. FUNÇÕES INTERVALARES

Mostrar-se-á nesta seção um estudo das funções intervalares, começando por uma revisão básica sobre funções e suas propriedades. O texto seguinte está baseado em (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 1997) e (Moore[19], 1979).

Definição 2.1.3.1: (*Produto Cartesiano*)

Sejam X e Y conjuntos não vazios. O produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto de todos os pares ordenados onde a primeira coordenada é constituída por elementos do conjunto X e a segunda por elementos do conjunto Y, ou seja,

$$X \times Y = \{(x, y) \,/\, x \in X,\ y \in Y\}.$$

Exemplo:

Sejam $X = \{1, 3, 5\}$ e $Y = \{2, 4\}$. Então,

$X \times Y = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$.

Definição 2.1.3.2: (*Função*)

Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma função f de X em Y é um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$ definido por

$$\{(x, f(x)) \,/\, x \in X,\ f(x) \in Y\}$$

de modo que para cada elemento x de X existe um único elemento y de Y tal que $y = f(x)$.

<u>Notação</u>: $f : X \rightarrow Y$
$x \mapsto f(x) = y.$

Exemplo:

$f : \{1, 3, 5\} \rightarrow \mathbb{N}$
$x \mapsto f(x) = x^2$

$f = \{(1,1), (3, 9), (5, 25)\}$.

Toda função $f : X \rightarrow Y$ é constituída de três partes: o ***domínio*** (conjunto X = dom(f)) onde a variável livre x pode assumir qualquer valor, o ***contra-domínio*** (conjunto Y = CD(f)) onde a variável dependente y ou f(x) pode encontrar seus valores, e a ***lei de formação,*** representada por y ou f(x) que é a fórmula que processa valores de X e encontra valores de Y.

Definição 2.1.3.3: (*Igualdade entre duas funções*)

Dadas duas funções f: A $\rightarrow$ B e g: C $\rightarrow$ D, f = g se, e somente se, A = C, B = D e f(x) = g(x), para todo x, i.e., duas funções são iguais quando estão definidas no mesmo domínio, possuem o mesmo contra-domínio e a mesma regra de formação.

Definição 2.1.3.4: (*Imagem de uma função*)

Seja a função f: X $\rightarrow$ Y. Diz-se ***imagem*** de f, o conjunto Im(f) = f(X) formado pelos valores de y = f(x) que f assume em todos os pontos x $\in$ X. Assim,

$$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{y = f(x) \in Y \,/\, x \in X\}.$$

Exemplo:

Seja f: $\{1, 3, 5\} \rightarrow \mathbb{N}$
$x \mapsto f(x) = x^2$

Para X = {1, 3, 5}, tem-se: Im(f) = f ({1, 3, 5}) = {1, 9, 25}.

Teorema 2.1.3.5: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 32)

Seja f: X $\rightarrow$ Y uma função e sejam A, B subconjuntos de X. Então, tem-se que f(A $\cup$ B) = f(A) $\cup$ f(B). *Isto é, a imagem da união de subconjuntos é igual a união das imagens dos subconjuntos.*

Demonstração:

Deve-se mostrar que **f(A $\cup$ B) $\subseteq$ f(A) $\cup$ f(B)** e que **f(A) $\cup$ f(B) $\subseteq$ f(A $\cup$ B)**.

1º) Se b $\in$ f(A $\cup$ B), então $\exists$a $\in$ (A $\cup$ B) tal que f(a) = b. Se a $\in$ A, então b $\in$ f(A). Por outro lado, se a $\in$ B, então b $\in$ f(B). Portanto, b $\in$ f(A) ou b $\in$ f(B) $\Rightarrow$ b $\in$ [f(A) $\cup$ f(B)]. Logo, **f(A $\cup$ B) $\subseteq$ f(A) $\cup$ f(B).**

2º) Se c $\in$ [f(A) $\cup$ f(B)], então c $\in$ f(A) ou c $\in$ f(B). Então, se c $\in$ f(A), $\exists$d $\in$ A tal que c = f(d) ou, se c $\in$ f(B), $\exists$d $\in$ B tal que c = f(B). Portanto, d $\in$ A ou d $\in$ B $\Rightarrow$ d $\in$ (A $\cup$ B) tal que c = f(d). Assim d $\in$ f(A $\cup$ B) e, portanto, **f(A) $\cup$ f(B) $\subseteq$ f(A $\cup$ B).**

Logo, conclui-se que **f(A $\cup$ B) = f(A) $\cup$ f(B).**

Teorema 2.1.3.6: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 33)

Seja $f : X \to Y$ uma função e sejam A, B subconjuntos de X com $A \subseteq B$. Então, $f(A) \subseteq f(B)$. Isto é**, *a imagem de A está contida na imagem de B se o conjunto A está contido no conjunto B*.**

Definição 2.1.3.7: (*Gráfico de uma função*)

Seja $f : X \to Y$ uma função. O ***gráfico*** da função f é o subconjunto $\mathbb{G}(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, para todo $x \in X$, ou seja,

$$\mathbb{G}(f) = \{(x, f(x)) \in X \cdot Y \,/\, x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Exemplo:

Seja $f : \{2, 4, 6\} \to \mathbb{N}$
$\qquad x \mapsto f(x) = x^2$

Para $X = \{2, 4, 6\}$, tem-se $\mathbb{G}(f) = \{(2, 4), (4, 16), (6, 36)\}$.

Observa-se que, pela definição de igualdade entre duas funções, que duas funções consideradas iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico, i.e., f, g: $X \to Y$ são iguais se, e somente se, $\mathbb{G}(f) = \mathbb{G}(g)$.

A seguir, será feito um estudo sobre as principais funções intervalares, começando pela definição formal de uma função intervalar.

Definição 2.1.3.8: (*Função Intervalar*)

Seja $F: X \to Y$ uma função. Se $X = Dom(f) \subseteq IR$ e $Y = CD(f) \subseteq IR$.
$\qquad X \mapsto F(X)$

Então, diz-se que f é uma função intervalar de uma variável intervalar.

Exemplo:

$F : IR \to IR$
$\qquad X \mapsto F(X) = [2, 3]X + [4, 5]$ é uma função intervalar.

Como em IR não vale a distributividade da soma em relação a multiplicação, as funções intervalares dependem da sua expressão.

Exemplo:

Sejam $F(X) = [2, 3]\cdot X^2 + [-5, 2]\cdot X + [3, 8]$ e $H(X) = X([2, 3]\cdot X + [-5, 2]) + [3, 8]$.

Para $X = [1, 2]$, tem-se:

$F(X) = [2, 3]\cdot[1, 2]^2 + [-5, 2]\cdot[1, 2] + [3, 8]$

$F(X) = [2, 3]\cdot[1, 4] + [-5, 2]\cdot[1, 2] + [3, 8] = [2, 12] + [-10, 4] + [3, 8]$

$\mathbf{F(X) = [-5, 24].}$

$H(X) = [1, 2]([2, 3]\cdot[1, 2] + [-5, 2]) + [3, 8]$

$H(X) = [1, 2]([2, 6] + [-5, 2]) + [3, 8]$

$H(X) = [1, 2]\cdot[-3, 8] + [3, 8] = [-6, 16] + [3, 8] = \mathbf{[-3, 24].}$

Logo, para $X = [1, 2]$, tem-se $F(X) \neq H(X)$. Segue que duas expressões diferentes, em algumas casos, representam funções diferentes.

Isso acarreta alguns problemas de natureza prática. O mesmo foi contornado através da introdução de uma noção de igualdade mais fraca no espaço de função, chamada igualdade local, por (Cruz[39], 2000, p. 69-72), onde conclui que "duas extensões racionais intervalares F e H de uma mesma função h são localmente iguais, e portanto equivalentes."

Definição 2.1.3.9: (*Inclusão Intervalar*)

Dado $x \in \mathbb{R}$, diz-se que $X \in IR$, é uma inclusão intervalar de x, se $x \in X$.

Exemplo:

O intervalo [2, 3] é uma inclusão intervalar para o número real ***e***.

Definição 2.1.3.10: (*Imagem Intervalar de uma função real*)

Sejam f uma ***função real*** de ***variável real*** e X um intervalo tal que $X \subseteq Dom(f)$, com **f contínua** em X. A ***imagem intervalar*** da função f em X é o intervalo:

$$I(f, X) = [\min\{f(x)/x \in X\}, \max\{f(x)/x \in X\}].$$

Dessa maneira, se $X = [x_1, x_2]$ é um intervalo pontual, então $Y = f(X)$ também é um intervalo pontual, dado por $Y = [f(x_1), f(x_2)]$. Assim, f está contida nesta extensão intervalar. Ainda, se $X = [x_1, x_2]$ é um intervalo com $d(X) > 0$, então $I(f, X)$ é o ***intervalo de menor diâmetro que contém todos os valores reais de f(X), quando*** $x \in X$.

Exemplo: Seja $f(x) = x^2 - x$ e $X = [0, 2] \subseteq Dom(f) = \mathbb{R}$.

Daí, $I(f, X) = I(x^2 - x, [0, 2]) = [\min\{x^2 - x / x \in [0, 2]\}, \max\{x^2 - x / x \in [0, 2]\}]$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$

- $V_y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-1}{4} = -\dfrac{1}{4}$ (ponto mínimo da função f(x) em Y)
- $f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ (ponto máximo da função f(X) para $x \in [0, 2]$).

Logo, $I(f, X) = \left[-\dfrac{1}{4}, 2\right]$.

Representação gráfica:

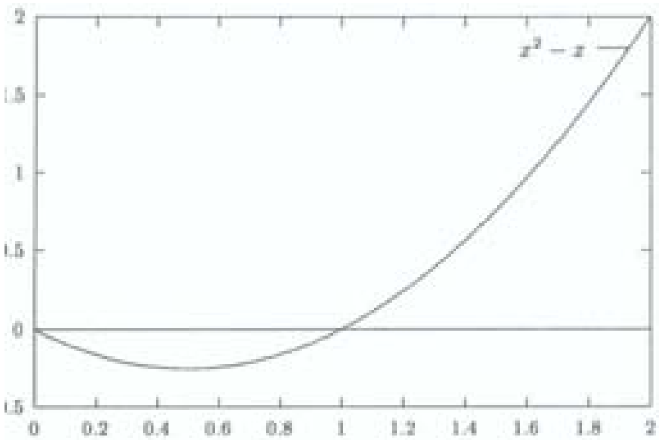

Figura 2.1.3.11: Imagem intervalar de $f(x) = x^2 - x$ em [0, 2]

Agora, fazendo $g(x) = x(x - 1)$ como uma extensão de f(x), então para $X = [0, 2] \subseteq Dom(f) = \mathbb{R}$, tem-se:

$I(g, X) = I(x(x - 1), [0, 2]) = [\min\{x(x - 1) / x \in [0, 2]\}, \max\{x(x - 1) / x \in [0, 2]\}]$.
Como $g(1/2) = ½(1/2 - 1) = ¼ - ½ = - ¼$ (ponto mínimo da função no intervalo) e
$g(2) = 2(2 - 1) = 2$ (ponto máximo da função no intervalo),
então, $I(g, X) = \left[-\dfrac{1}{4}, 2\right]$.

Portanto, I(f, X) = I(*g*, X), pois f(x) e g(x) representam a mesma função real, porém escritas com expressões diferentes. Assim, a imagem da função real independe de sua expressão.

Definição 2.1.3.12: (*Extensão Intervalar de uma função real*)

Sejam f uma ***função real*** de ***variável real*** e X um intervalo. A ***extensão intervalar*** de f em X (ou ***avaliação*** *intervalar* de f) é a função intervalar F(X), definida da seguinte maneira: "cada ocorrência da variável real x é substituída pela variável intervalar X e cada operação real (+ , - , × , /) é substituída pela respectiva operação intervalar de tal modo que, quando X = [x, x] for um intervalo pontual, então F(X) = f(x)".

Exemplo:

Seja $f(x) = x^2 - x = x \cdot x - x$ e $X = [0; 2] \subseteq \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Substituindo x (real) por X (intervalo), i.e., fazendo f(x) = F(X), tem-se $F(X) = X \cdot X - X$. Assim,

$F([0, 2]) = [0, 2]\cdot [0, 2] - [0, 2] = [0, 4] - [0, 2] = [-2, 4]$.

Analogamente, para $g(x) = x(x - 1)$, tem-se a extensão: $G(X) = X(X - 1)$, e assim,

$G([0, 2]) = [0, 2] ([0, 2] - [1, 1]) = [0, 2]\cdot [-1, 1] = [-2, 2]$.

Do ponto de vista da igualdade intervalar usual, $F(X) \neq G(X)$, e portanto, a definição da avaliação intervalar depende da expressão funcional real f(x) correspondente. Esse problema possui uma saída alternativa, proposta por (Cruz[39], 2000).

Resumindo, I(f, X) independe da expressão da função, enquanto que, F(X) depende da expressão e dos operadores envolvidos.

A seguir, alguns teoremas que estabelecem as propriedades básicas das funções intervalares I(f, X) e F(X).

Teorema 2.1.3.13: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 37)

Seja f uma função real de variável real e X, Y dois intervalos. Se $X \subseteq Y \subseteq \text{Dom}(f)$, então $I(f, X) \subseteq I(f, Y)$.

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ para $X = [2; 3]\cdot$ e $Y = [1; 4]$. Então:

$I(f, X) = I(x^2, [2, 3]) = [2, 3]^2 = [2, 3]\cdot [2, 3] = [\mathbf{4, 9}]$

$I(f, Y) = I(x^2, [1, 4]) = [1, 4]^2 = [1, 4]\cdot[1, 4] = [\mathbf{1, 16}]$

Logo, $[2, 3] \subseteq [1, 4]$ e $[4, 9] \subseteq [1, 16]$.

E, portanto, se $X \subseteq Y \subseteq Dom(f)$, então $I(f, X) \subseteq I(f, Y)$.

Teorema 2.1.3.14: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 37)

Sejam f uma *função contínua* de variável real x e F(X) a sua extensão intervalar. Então, vale que $I(f, X) \subseteq F(X)$. para todo $X \subseteq Dom(f)$.

Exemplo:

Seja $f(x) = x(x - 1)$. Tomando-se $X = [0, 2]$, tem-se:

$I(x(x - 1), [0; 2]) = [-1/4, 2]$ e

$F([0, 2]) = [0, 2] ([0, 2] - [1, 1]) = [0, 2]\cdot [-1, 1] = [-2, 2]$.

Logo, $I(f, X) = [-1/4, 2] \subseteq F(X) = [-2, 2]$.

Corolário 2.1.3.15: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 37)

Se $X = [x; x]$, então $I(f, X) = F(X)$.

Corolário 2.1.3.16: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 38)

Se $x \in X$, então $I(f, x) \in I(f, X)$ e $f(x) \in F(X)$.

Dessa maneira, toda função real contínua é obtida como o limite de sua extensão intervalar, quando o intervalo X tende à borda do semi-plano intervalar, ou seja, quando *lim diam*(X) = 0. Assim, $f(x) = lim_{X \to x} F(X)$.

Será mostrado a seguir, outras funções intervalares básicas.

Definição 2.1.3.17: (*Função Exponencial*)

Define-se a ***função exponencial intervalar***

$$\begin{aligned} Exp : IR &\to IR \\ X &\mapsto Exp(X) \end{aligned} \quad \text{por} \quad Exp([x_1, x_2]) = [exp(x_1), exp(x_2)].$$

Representação gráfica:

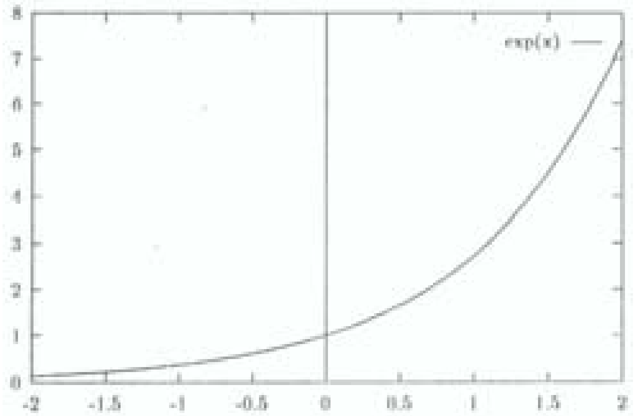

Figura 2.1.3.18: Função exponencial intervalar

Exemplo:

Seja X = [0, 1]. Então, Exp(X) = Exp([0, 1]) = [1, 2.718281828...].

Definição 2.1.3.19: (*Função Logaritmo*)

Define-se a ***função logartimo intervalar***

$$\begin{aligned} Ln : IR &\to IR \\ X &\mapsto Ln(X) \end{aligned}$$ por $Ln([x_1, x_2]) = [ln(x_1), ln(x_2)]$, onde $IR = \{[x_1, x_2] \in IR / x_1 > 0\}$.

Representação gráfica:

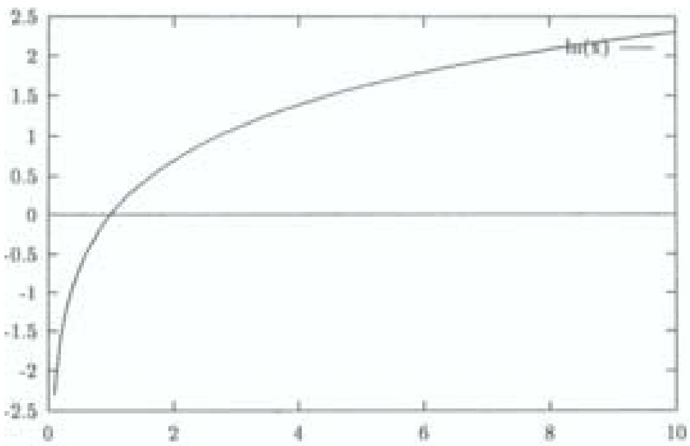

Figura 2.1.3.20: Função logaritmo intervalar

Exemplo:

Seja X = [1, e]. Então, Ln(X) = Ln([1, e]) = [0, 1].

Para os intervalos, ainda continua valendo algumas identidades. Por exemplo,

Exp(Ln(X)) =X e Ln(Exp(X)) = X.

Definição 2.1.3.21: (*Função Seno*)

Define-se a ***função seno intervalar***

$$\begin{array}{l} \text{Sen} : \text{IR} \rightarrow \text{IR} \\ \qquad X \mapsto \text{Sen}(X) \end{array} \quad \text{por} \quad \text{Sen}(X) = \text{I}(\text{Sen}(x), X).$$

Representação gráfica:

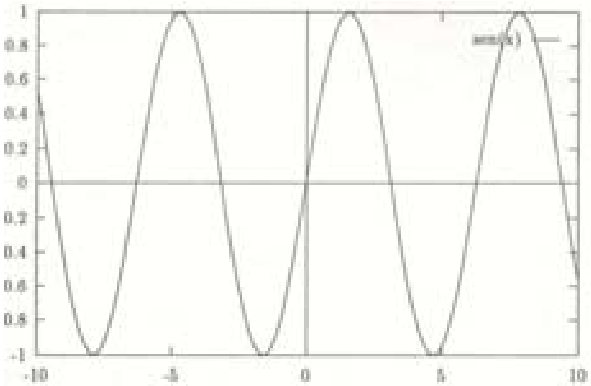

Figura 2.1.3.22: Função seno intervalar

Exemplo:

Seja X = [0, 1]. Então, Sen(X) = I(sen(x), [0, 1]) = [0, 0.841470985...].

Definição 2.1.3.23: (*Função Cosseno*)

Define-se a ***função cosseno intervalar***

$$\begin{array}{l} \text{Cos} : \text{IR} \rightarrow \text{IR} \\ \qquad X \mapsto \text{Cos}(X) \end{array} \quad \text{por} \quad \text{Cos}(X) = \text{I}(\text{Cos}(x), X) = \text{Sen}(X + [\pi/2, \pi/2]).$$

Representação gráfica:

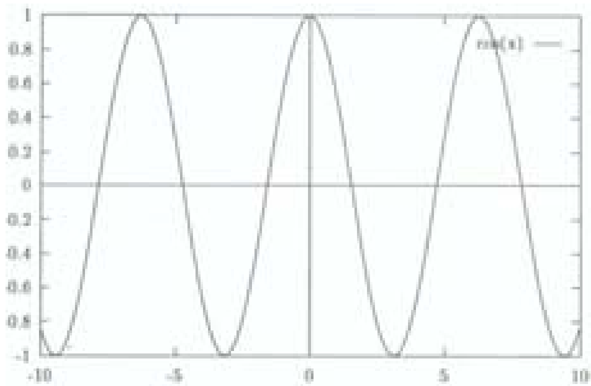

Figura 2.1.3.24: Função cosseno intervalar

Exemplo:

Seja X = [0, π/2]. Então, Cos(X) = I(cos(x), [0, π/2]) = [0, 1].

Definição 2.1.3.25: (*Função Raiz Quadrada*)

Define-se a ***função intervalar*** $Y = \sqrt{\mathbf{X}}$ por $\sqrt{\mathbf{X}} = \sqrt{[x_1, x_2]} = \left[\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}\right] = I(\sqrt{\mathbf{x}}, X)$

Representação gráfica:

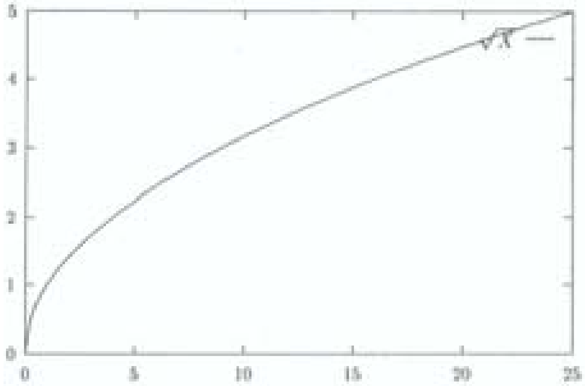

Figura 2.1.3.26: Função raiz quadrada intervalar.

Exemplos:

1. Seja X = [9, 25]. Então, $\sqrt{[9, 25]} = [3, 5] \Rightarrow I(\sqrt{\mathbf{X}}, [9, 25]) = [3, 5]$
2. Seja X = [0, 25]. Então, $\sqrt{[0, 25]} = [0, 5] \Rightarrow I(\sqrt{\mathbf{X}}, [0, 25]) = [0, 5]$.

Definição 2.1.3.27: (*Função Quadrática*)

Define-se a ***função quadrática intervalar***

$$\begin{array}{l} F : IR \rightarrow IR \\ \quad X \mapsto F(X) = X^2 \end{array} \quad \text{por} \quad F(X) = X^2 = I(x^2, X) = \begin{cases} \left[x_1^2, x_2^2\right] & \text{se} \quad x_1 > 0 \\ \left[x_2^2, x_1^2\right] & \text{se} \quad x_2 < 0. \\ \left[0, |X|^2\right] & \text{se} \quad 0 \in X \end{cases}$$

Representação gráfica:

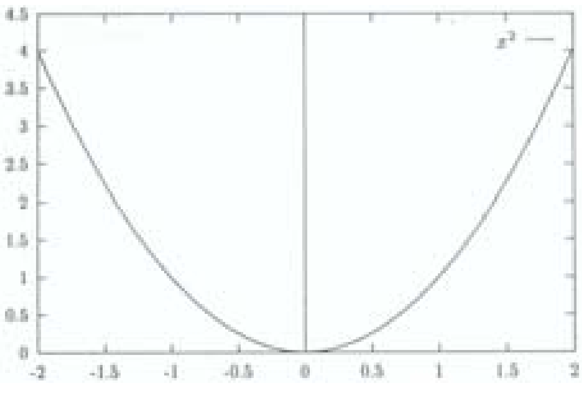

Figura 2.1.3.28: Função quadrática intervalar.

Exemplo:

Seja X = [-2, 2]. Então, $X^2 = [-2, 2]^2 = [0, 4]$. Isto é, como $0 \in X$, tem-se

$I(x^2, X) = [0, |X|^2] = [0, |[(-2)^2, 2^2]|] = [0, |[4, 4]|] = [0, 4]$.

Definição 2.1.3.29: (*Função Potência Intervalar*)

Define-se a ***função potência intervalar***

$$\begin{aligned} F : IR &\to IR \\ X &\mapsto F(X) = X^n \end{aligned} \quad \text{por} \quad F(X) = X^n \; X^n = I(x^n, X) \;\; \text{e } X^0 = [1, 1].$$

Exemplo:

Seja X = [-2, 3]. Então, $X^3 = [-2, 3]^3 = [-8, 27]$.

Definição 2.1.3.30: (*Função Arco-Tangente Intervalar*)

Define-se a ***função arco-tangente intervalar***

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} : IR &\to IR \\ X &\mapsto \operatorname{Arctan}(X) \end{aligned} \quad \text{por} \quad \operatorname{Arctan}(X) = \operatorname{Arctan}([x_1, x_2]) = [\arctan(x_1), \arctan(x_2)].$$

Representação gráfica:

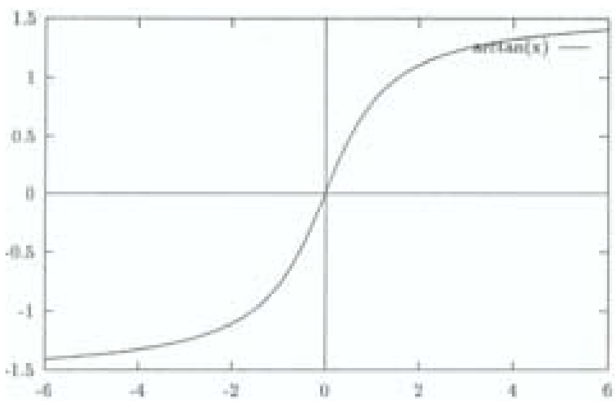

Figura 2.1.3.31: Função arco-tangente intervalar.

Exemplo:

Seja X = [-2, 3]. Então,

Arctan(X) = Arctan([-2, 3]) = [arctan(-2), arctan(2)] = [-1.107148718..., 1.249045772...].

2.1.4. SEQUÊNCIAS INTERVALARES

Mostra-se a seguir, algumas definições básicas da teoria das seqüências intervalares. O texto abaixo está baseado em (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 1997) e (Moore[19], 1979).

Definição 2.1.4.1: (*Sequência Intervalar*)

Uma **sequência intervalar** é uma função $X: \mathbb{N} \to \mathrm{IR}$

$$n \mapsto X(n) = X_n$$

que associa a cada número natural n um intervalo X(n) em IR. O intervalo X(n) será representado por X_n e será chamado ***termo de ordem n*** ou ***n-ésimo termo da sequência***. A sequência $X = (X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...)$ será denotada por $(X_n)_m \in \mathbb{N}$ ou simplesmente $(X_n)_m$, onde:

$(X_n)_m$
- m → Representa o número de termos da sequência
- n → Representa o n-ésimo termo da sequência

Exemplos:

1. $X: \mathbb{N} \to \mathrm{IR}$

$$n \mapsto X(n) = X_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \frac{5n+1}{n}\right]$$

2. $Y: \mathbb{N} \to \mathrm{IR}$

$$n \mapsto Y(n) = Y_n = (-1)^n[-2, 3]$$

3. $Z: \mathbb{N} \to \mathrm{IR}$

$$n \mapsto Z(n) = Z_n = [n, n+1].$$

Definição 2.1.4.2: (*Sequências Limitadas*)

Seja $X = (X_n)_n$ uma **sequência intervalar**. Diz-se que X é uma ***sequência limitada*** se existe um real $r > 0$ tal que $|\mathbf{X_n}| \leq \mathbf{r}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, a ***sequência é ilimitada***.

Nos exemplos anteriores, X e Y são sequências limitadas, enquanto que Z é ilimitada. Para Y, é suficiente r = 3. pois:

$Y_1 = (-1)^1 \cdot [-2, 3] = (-1) \cdot [-2, 3] = [-3, 2]$

$Y_2 = (-1)^2 \cdot [-2, 3] = (1) \cdot [-2, 3] = [-2, 3]$

$Y_3 = (-1)^3 \cdot [-2, 3] = (-1) \cdot [-2, 3] = [-3, 2]$, ou seja, $Y_i = Y_{i+2}$.

Definição 2.1.4.3: (*Sequência Intervalar Monótona*)

Seja X = $(X_n)_m$ uma sequência intervalar. Diz-se que $(X_n)_m$ é uma ***sequência Intervalar Monótona*** quando ambas as suas sequências de extremos são sequências monótonas.

São consideradas quatro tipos de sequências intervalares monótonas, a saber:

1. $x_n \leq x_{n+1}$ e $y_n \leq y_{n+1}$, $\forall n \in N$ $[\longrightarrow, \longrightarrow]$ (sentidos de convergência)
2. $x_n \geq x_{n+1}$ e $y_n \leq y_{n+1}$, $\forall n \in N$ $[\longleftarrow, \longrightarrow]$ (sentidos de convergência)
3. $x_n \geq x_{n+1}$ e $y_n \geq y_{n+1}$, $\forall n \in N$ $[\longleftarrow, \longleftarrow]$ (sentidos de convergência)
4. $x_n \leq x_{n+1}$ e $y_n \geq y_{n+1}$, $\forall n \in N$ $[\longrightarrow, \longleftarrow]$ (sentidos de convergência)

Observa que o quarto tipo de convergência é igual a sequência de aproximação de Scott, ou seja, [a, b] << [c, d].

Exemplos:

1. $(X_n)_m = ([n, n+1])_m$ → monótona e ilimitada
2. $(X_n)_m = \left(\left[\frac{n+1}{n+3}, \frac{n+2}{n+3}\right]\right)_m$ → monótona e limitada
3. $(X_n)_m = ([-n, n])_m$, → monótona e ilimitada
4. $(X_n)_m = \left(\left[\frac{n+1}{n}, \frac{3n+7}{n+3}\right]\right)_m$ → monótona e limitada
5. $(X_n)_m = ([-n, 1-n])_m$, → monótona e ilimitada
6. $(X_n)_m = \left(\left[\frac{1-n}{n}, \frac{n+1}{n}\right]\right)_m$ → monótona e limitada
7. $(X_n)_m = \left(\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \frac{5n+1}{n}\right]\right)_m$ → monótona e limitada

Exemplos: Sequências não monótonas

1. $(X_n)_m = \left(\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right), n\right]\right)_m$ → ilimitada
2. $(X_n)_m = \left(\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right), 1+\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)\right]\right)_m$ → limitada e periódica.

Definição 2.1.4.4: (*Limite de uma Sequência Intervalar*)

Seja $X = (X_n)_m$ uma seqüência intervalar. Diz-se que $\mathcal{L}$ é o limite da seqüência $X = (X_n)_m$ se os termos X_m se aproximam cada vez mais de $\mathcal{L}$ a medida que n aumenta, ou seja, $\mathcal{L}$ é o limite da seqüência $X = (X_n)_m$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \{d(X_n, \mathcal{L}) < \varepsilon\} \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Simbolicamente, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow d(X_n, \mathcal{L}) < \varepsilon.$$

<u>Notação</u>: $\mathcal{L} = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ ou $\mathcal{L} = \lim X_n$.

Definição 2.1.4.5: (*Sequência Convergente*)

Seja $X = (X_n)_m$ uma seqüência intervalar. Diz-se que $X = (X_n)_m$ é uma ***seqüência convergente*** se existe $\mathcal{L} \in IR$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \mathcal{L}$.

<u>Notação</u>: $X_n \to \mathcal{L}$ quando $\mathbf{n} \to \infty$ (lê-se: $\mathbf{X_n}$ converge para $\mathcal{L}$ quando **n** tende ao infinito).

Exemplos: Seqüências convergentes

1. Seja $(X_n)_m = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \dfrac{5n+1}{n}\right]$, então
   - $X_1 = [2, 6]$
   - $X_2 = \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2, \dfrac{11}{2}\right] = \left[\dfrac{9}{4}, \dfrac{11}{2}\right] \cong [2{,}25,\ 5{,}5]$
   - $X_3 = \left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^3, \dfrac{16}{3}\right] = \left[\dfrac{64}{27}, \dfrac{16}{3}\right] \cong [2{,}37,\ 5{,}3]$
   - $X_4 = \left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^4, \dfrac{21}{4}\right] = \left[\dfrac{625}{256}, \dfrac{21}{4}\right] \cong [2{,}44,\ 5{,}25]$
   - $X_5 = \left[\left(\dfrac{6}{5}\right)^5, \dfrac{26}{5}\right] = \left[\dfrac{7776}{3125}, \dfrac{26}{5}\right] \cong [2{,}48,\ 5{,}2]$
   - $X_6 = \left[\left(\dfrac{7}{6}\right)^6, \dfrac{31}{6}\right] = \left[\dfrac{117649}{46656}, \dfrac{31}{6}\right] \cong [2{,}52,\ 5{,}16]$
   - ...

Logo, $X = (X_n)_m = (([2,\ 6])_1,\ ([2{,}25,\ 5{,}5])_2,\ ([2{,}37,\ 5{,}3])_3,\ ([2{,}44,\ 5{,}25])_4,\ ([2{,}48,\ 5{,}2])_5,\ ([2{,}52,\ 5{,}16])_6,\ ...,\ ([3,\ 5])_n)_m$.

Note que sequência está convergindo para [3, 5] e cai no 4º caso de convergência.

2. Seja $(X_n)_m = \left(\left[\frac{n+1}{n+3}, \frac{n+2}{n+3}\right]\right)_m$

- $X_1 = \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right] \cong [0{,}5,\ 0{,}71]$
- $X_2 = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right] \cong [0{,}6,\ 0{,}8]$
- ...
- $X_5 = \left[\frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right] \cong [0{,}75,\ 0{,}87]$
- ...
- $X_9 = \left[\frac{10}{12}, \frac{11}{12}\right] \cong [0{,}83,\ 0{,}91]$
- ...
- $X_{15} = \left[\frac{16}{18}, \frac{17}{18}\right] \cong [0{,}89,\ 0{,}94]$
- ...
- $X_{29} = \left[\frac{30}{32}, \frac{31}{32}\right] \cong [0{,}93,\ 0{,}96]$
- ...

Note que essa sequência está convergindo para [1, 1] e cai no 2º caso de convergência.

3. Seja $(X_n)_m = \left(\left[\frac{n+1}{n}, \frac{3n+7}{n+3}\right]\right)_m$

- $X_1 = \left[2, \frac{10}{4}\right] \cong [2,\ 2{,}5]$
- $X_2 = \left[\frac{3}{2}, \frac{13}{5}\right] \cong [1{,}5,\ 2{,}6]$
- $X_3 = \left[\frac{4}{3}, \frac{16}{6}\right] \cong [1{,}3,\ 2{,}66]$
- ...
- $X_{20} = \left[\frac{21}{20}, \frac{67}{23}\right] \cong [1{,}05,\ 2{,}91]$
- ...

- $X_{40} = \left[\frac{41}{40}, \frac{127}{43}\right] \cong [1{,}025, 2{,}95]$
- ...
- $X_{100} = \left[\frac{101}{100}, \frac{307}{103}\right] \cong [1{,}01, 2{,}98]$
- ...

Note que essa sequência está convergindo para [1; 3] e cai no 2º caso de convergência.

4. Seja $(X_n)_m = \left(\left[\frac{1-n}{n}, \frac{n+1}{n}\right]\right)_m$

- $X_1 = [0, 2] \cong [0, 2]$
- $X_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cong [-0{,}5, 1{,}5]$
- $X_3 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] \cong [-0{,}66, 1{,}33]$
- $X_4 = \left[-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \cong [-0{,}75, 1{,}25]$
- ...
- $X_{10} = \left[-\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right] \cong [-0{,}9, 1{,}1]$
- ...
- $X_{20} = \left[-\frac{19}{20}, \frac{21}{20}\right] \cong [-0{,}95, 1{,}05]$
- ...

Note que essa sequência está convergindo para [-1, 1] e cai no 3° caso de convergência.

Definição 2.1.4.6: (*Sequência Divergente*)

Uma seqüência $X = (X_n)_m$ é dita divergente apenas se não for convergente.

Exemplos: Seqüências divergentes

1. Seja $(X_n)_m = (-1)^n[-2, 3]$

- $X_1 = (-1)^1\cdot[-2, 3] = (-1)\cdot[-2, 3] = [-3, 2]$
- $X_2 = (-1)^2\cdot[-2, 3] = (1)\cdot[-2, 3] = [-2, 3]$
- $X_3 = (-1)^3\cdot[-2, 3] = (-1)\cdot[-2, 3] = [-3, 2]$
- $X_4 = (-1)^4\cdot[-2, 3] = (1)\cdot[-2, 3] = [-2, 3]$, ou seja, $X_i = X_{i+2}$

Note que essa sequência é não monótona, limitada, periódica e divergente.

2. Seja $(X_n)_m = ([-n, n])_n$
   - $X_1 = [-1, 1]$
   - $X_2 = [-2, 2]$
   - $X_3 = [-3, 3]$
   - ...

Note que essa seqüência é monótona, ilimitada e divergente.

3. Seja $(X_n)_m = \left(\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right),\ n\right]\right)_m$
   - $X_1 = \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, 1\right] = [1, 1]$
   - $X_2 = [\operatorname{sen}\pi, 2] = [0, 2]$
   - $X_3 = \left[\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}, 3\right] = [-1, 3]$
   - $X_4 = [\operatorname{sen}2\pi, 4] = [0, 4]$
   - ...

Note que essa seqüência é não monótona, ilimitada e divergente.

4. Seja $(X_n)_m = \left(\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right),\ 1+\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)\right]\right)_m$
   - $X_1 = \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, 1+\cos\frac{\pi}{2}\right] = [1, 1]$
   - $X_2 = [\operatorname{sen}\pi, 1+\cos\pi] = [0, 0]$
   - $X_3 = \left[\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}, 1+\cos\frac{3\pi}{2}\right] = [-1, 1]$
   - $X_4 = [\operatorname{sen}2\pi, 1+\cos 2\pi] = [0, 2]$
   - $X_5 = \left[\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}, 1+\cos\frac{5\pi}{2}\right] = [1, 1] \Rightarrow X_1 = X_5$, isto é, o período termina em X_4.

Note que essa seqüência é não monótona, limitada, periódica e divergente.

Teorema 2.1.4.7: (*Unicidade do Limite*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 50)

Seja $X = (X_n)_m$ uma seqüência intervalar convergente.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \mathcal{L}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = I$, então $\mathcal{L} = I$.

Teorema 2.1.4.8: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 50)

Toda seqüência convergente é limitada.

Demonstração: Seja X = $(X_n)_m$ uma seqüência intervalar convergente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \mathcal{L}$.

Para mostrar que X é limitada, precisa-se encontrar um número real r > 0 tal que $|\mathbf{X_n}| < \mathbf{r}, \quad \forall \mathbf{n} \in N$. Como X é convergente, então $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$ tal que $n > n_0 \Rightarrow$ $d(X_n, \mathcal{L}) < \varepsilon$. Assim, tomando ε = 1, tem-se que existe um n' ∈ N tal que $n > n' \Rightarrow$ $d(X_n, \mathcal{L}) < 1$.

Tomando-se r = $\max\{|X_1|, |X_2|, |X_3|, ..., |X_{n'}|, |L| + 1\}$, pois $\forall 1 \le n \le n'$ tem-se,

$|\mathbf{X_n}| \le \max\{|X_1|, |X_2|, |X_3|, ..., |X_{n'}|, |L| + 1\} = r$.

$\forall n \ge n'$, tem-se $|\mathbf{X_n}| \le |\mathbf{L}| + 1 \le \max\{|X_1|, |X_2|, |X_3|, ..., |X_{n'}|, |L| + 1\} = r$.

Logo, $\forall n \in N$, $|\mathbf{X_n}| < r \;\therefore\; (X_n)_m$ é limitada.

Nota-se que a recíproca deste teorema é falsa, pois, pode-se ter uma seqüência limitada que não seja convergente, como por exemplo X = $(X_n)_m = ((-1)^n[-2; 3])_m$.

Por este teorema, conclui-se que toda seqüência intervalar convergente é limitada, mas nem toda seqüência intervalar limitada é convergente. Por outro lado, uma seqüência intervalar ilimitada não pode ser convergente.

Teorema 2.1.4.9: (*Bolzano-Weierstrass*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 50)

Toda seqüência intervalar monótona limitada é convergente.

Corolário 2.1.4.10: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 50)

Toda seqüência de intervalos *encaixados* é convergente.

Demonstração: Como uma seqüência de intervalos encaixados é um caso particular de seqüência monótona, que é sempre limitada pelo módulo de seu primeiro termo, a prova é imediata do teorema 2.1.4.9.

Os teoremas 2.1.4.11 e 2.1.4.12 apresentarão algumas propriedades aritméticas dos limites de seqüências intervalares, úteis para determinação de limites que podem ser obtidos através de soma, subtração, multiplicação e divisão de seqüências pré-existentes.

Teorema 2.1.4.11: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 51)

Sejam X = $(X_n)_m$ e Y = $(Y_n)_m$ seqüências intervalares. Se $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = [0, 0]$ e $(Y_n)_m$ é limitada, então $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n \cdot Y_n) = [0, 0]$.

Exemplo: Considerando-se as seqüências:

$X = (X_n)_m = \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, $Y = (Y_n)_m = \left(\left[1+\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right), 2+\cos\left(\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right)\right]\right)_m$ e $S = (S_n)_m$, tem-se:

$$S = (S_n)_m = (X_n \cdot Y_n)_m = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\cdot\left(\left[1+\operatorname{sen}\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right),\ 2+\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right]\right)_m$$

$$S = (S_n)_m = (X_n \cdot Y_n)_m = \left[\frac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)}{n+1}, \frac{2+\operatorname{sen}\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)}{n}\right].$$

Teorema 2.1.4.12: (*Propriedades*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 51)

Sejam X = $(X_n)_m$ e Y = $(Y_n)_m$ seqüências intervalares. Se $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = A$ e $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = B$, então valem as seguintes propriedades:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n + Y_n) = A + B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n - Y_n) = A - B$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (- Y_n) = - B$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n \cdot Y_n) = A \cdot B$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (1/Y_n) = 1/B$, se $0 \notin B$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n/Y_n) = A/B$, se $0 \notin B$.

Observe que a convergência de uma seqüência, vem sendo caracterizada pela *"distância dos termos* X_n *da seqüência ao limite* $\mathcal{L}$ *tende à zero a medida que n cresce"*. Mas para isso, é necessário que se conheça o valor do limite $\mathcal{L}$, antecipadamente. Como na maioria das situações práticas o que se quer é exatamente obter tal limite, então não é possível usar este critério para determinar se a seqüência é ou não convergente, uma vez que não se sabe quem é o limite.

Entretanto, pode-se reformular a questão da seguinte maneira: "*a medida que n cresce, se a seqüência for convergente, então os termos X_n começam a ficar tão próximos de $\mathcal{L}$ quanto se queira, pois, dado qualquer $\varepsilon > 0$, a partir de um certo n_0 todos estão dentro de uma determinada região de centro em $\mathcal{L}$ e de raio ε*". Dessa maneira, é natural observar que os termos tendem a ficar cada vez mais próximos entre si. Este é o critério usado para se determinar as **Seqüências de Cauchy**.

Definição 2.1.4.13: (*Sequências de Cauchy*)

Seja $X = (X_n)_m$ uma seqüência intervalar. Diz-se que X é uma **seqüência de Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m > n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow \{d(X_m, X_n) < \varepsilon\}.$$

Dessa forma, a condição de convergência se impõe apenas sobre os termos da própria seqüência, ou seja, não é necessário conhecer o limite para saber se a seqüência converge ou não.

Teorema 2.1.4.14: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 52)

Toda seqüência de Cauchy é limitada.

Teorema 2.1.4.15: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 52)

Toda seqüência convergente é de Cauchy.

Teorema 2.1.4.16: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 52)

Toda seqüência de Cauchy em IR é convergente.

O fato de uma seqüência ser ou não de Cauchy é importante para obter-se o valor do limite através de aproximações sucessivas, calculadas iterativamente num computador ou máquina digital, pois se os termos estão ficando cada vez mais próximos entre si, então com certeza eles estão se aproximando do limite, i.e., se $d(X_n, X_{n+1}) \to 0$ então $X_n \to \mathcal{L}$. Assim, diante desse raciocínio, pode-se verificar a distância de X_n a X_{n+1} para saber se a seqüência está convergindo ou não.

Exemplo: Considere o seguinte problema:

Determinar o limite da seguinte seqüência recursiva de extremos racionais:

$$X_0 = \left[\frac{1}{4}, 10\right], \quad X_1 = \left[1, \frac{31}{4}\right] \text{ e } X_{n+2} = \frac{X_{n+1} + X_n}{2}$$

Como não há uma lei de formação para cada X_n em termos de n, tem-se a recursão calculada passo a passo. Assim,

$$\mathsf{d}(X_{n+1}, X_n) = \mathsf{d}\left(\frac{X_n + X_{n-1}}{2}, X_n\right) = \mathsf{d}\left(\frac{X_n + X_{n-1}}{2}, \frac{2 \cdot X_n}{2}\right) =$$

$$\mathsf{d}\left(\frac{X_n + X_{n-1}}{2}, \frac{X_n + X_n}{2}\right) \leq \left|\frac{1}{2}\right| \cdot \mathsf{d}\left(X_n + X_{n-1}, X_n + X_n\right) = \frac{1}{2}\mathsf{d}\left(X_{n-1}, X_n\right) =$$

$$\frac{1}{2}\mathsf{d}\left(X_n, X_{n-1}\right).$$

Assim, $\mathsf{d}(X_{n+1}, X_n) \leq \frac{1}{2^{\mathbf{n}}} \cdot \mathsf{d}\left(X_1, X_0\right) = \frac{\frac{9}{4}}{2^{\mathbf{n}}} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Logo, $X = (X_n)_m$ é convergente e então existe $\mathcal{L} \in \mathrm{IR}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \mathcal{L}$.

Cálculo de $\mathcal{L}$: A tabela abaixo mostra os valores calculados dos termos da sequência X = $(X_n)_m$, ou seja, $X_0 = \left[\frac{1}{4}, 10\right]$, $X_1 = \left[1, \frac{31}{4}\right]$ e $X_{n+2} = \frac{X_{n+1} + X_n}{2}$

Tabela 2.1.4.17: Valores da seqüência X_n

n	X_n
0	[0,25, 10]
1	[1, 7,75]
2	[0,625, 8,875]
3	[0,8125, 8,3125]
...	...
10	[0,74951172, 8,5014648]
11	[0,75024414, 8,4992675]
12	[0,74987793, 8,5003662]
...	...
20	[0,74999952, 8,5000014]
21	[0,75000024, 8,4999993]
22	[0,74999988, 8,5000003]
23	[0,75000006, 8,4999998]
24	[0,74999997, 8,5000001]
25	[0,75000001, 8,4999999]
26	[0,74999999, 8,5]
27	[0,75, 8,5]
28	[0,75, 8,5]
29	[0,75, 8,5]
30	[0,75, 8,5]
...	...
$\lim\limits_{n\to\infty} X_n$	[0,75, 8,5]

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = [0{,}75,\ 8{,}5]$.

2.1.5. O MÉTODO DE NEWTON INTERVALAR

Assim como o Método de Newton real consiste de um algoritmo para calcular a raiz de uma equação, através da construção de uma sequência convergente de pontos da reta real, o *Método de Newton Intervalar* permite construir uma sequência convergente de intervalos, cujo limite será um intervalo que contém a raiz real da equação.

Segundo (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 1997, p. 56), "*tomando-se um intervalo inicial que não contém a raiz real, então, numa dada iteração, obter-se-á um intervalo vazio como resultado*". Por outro lado, tomando-se um intervalo inicial, que contém a raiz real da equação f(x) = 0 e, considerando que a sequência intervalar que se obtém seja de intervalos encaixados, com certeza obter-se-á como limite o intervalo de menor diâmetro possível, que ainda conterá a raiz real desejada. Portanto, esta é a vantagem do uso do *Método de Newton Intervalar*.

Mostrar-se-á as versões real e intervalar do Método de Newton, conforme (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 1997, p. 57-65).

2.1.5.1. O Método de Newton na versão real

Seja f(x) uma função real contínua, com derivada f'(x) definida num intervalo [a, b] que contém a raiz real x_* de modo que $f'(x_*) \neq 0$. Toma-se um ponto x_0 em [a, b] e calcula-se um novo ponto x_1 a partir de x_0.

Sabe-se que $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = a$ é a inclinação da reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ em geometria analítica, como também $(y - y_0) = a(x - x_0)$ é a equação da reta que passa pelo mesmo ponto $P = (x_0, y_0)$.

Analogamente, $\dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ e, $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$ é a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Assim,

$$\mathbf{y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0).x - f'(x).x_0 + f(x_0).}$$

Mas, x_1 é o ponto de intersecção da reta tangente ao gráfico com o eixo das ordenadas, ou seja, $y(x_1) = 0$, portanto $0 = f'(x_0).x_1 - f'(x_0).x_0 + f(x_0)$. Logo, $f'(x_0).x_1 = f'(x_0).x_0 - f(x_0)$. Assim,

$$x_1 = \frac{f'(x_0)\cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \therefore \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Genericamente, $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ é a fórmula que permite gerar a seqüência de pontos convergindo para a raiz $\boldsymbol{x_*}$ de $f(x_*) = 0$.

O ponto inicial x_0 deve ser tomado suficientemente próximo da raiz $\boldsymbol{x_*}$ para que o método convirja para a raiz desejada. Geralmente, toma-se $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ (ponto médio), ou ainda, $x_0 \in [a, b]$, tal que $f(x_0).f''(x_0) > 0$.

Definição 2.1.5.1.1: (*Operador Newtoniano*)

O **Operador Newtoniano** é dado pela expressão $N(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Teorema 2.1.5.1.2: (*Método de Newton Real*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 58)

Seja $f(x)$ uma função real contínua com derivada $f'(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$, que contém a raiz real x_* de $f(x) = 0$. Tomando $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ e, definindo a sequência recursiva $x_{k+1} = N(x_k)$, então a sequência x_k é convergente e $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$.

Exemplo:

1) Calcular o valor de $\sqrt{2}$, através do Método de Newton Real,

<u>Solução</u>:

$x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$

Daí, tem-se: $f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

Como $1 \le 2 \le 4 \Rightarrow \sqrt{1} \le \sqrt{2} \le \sqrt{4} \Rightarrow 1 \le \sqrt{2} \le 2.$

Então $\sqrt{2} \in [1, 2]$

Tomando-se $x_0 = 2 \in [1, 2]$, tem-se $f(2) \cdot f'(2) = (2^2 - 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 > 0$.

Definindo-se a sequência como: $x_{k+1} = N(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k^2 - 2)}{2x_k}$

$$= \frac{(2x_k^2 - x_k^2 + 2)}{2x_k} = \frac{(x_k^2 + 2)}{2x_k}.$$

Assim,

$x_0 = 2$

$$x_1 = x_{0+1} = \frac{(2^2 + 2)}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = x_{1+1} = \frac{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\right)}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\left(\frac{9}{4} + 2\right)}{3} = \frac{17}{12} = 1{,}416666...$$

$$x_3 = x_{2+1} = \frac{\left(\left(\frac{17}{12}\right)^2 + 2\right)}{2 \cdot \frac{17}{12}} = \frac{\left(\frac{289}{144} + 2\right)}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{408} = 1{,}4142156862...$$

$$x_4 = x_{3+1} = \frac{\left(\left(\frac{577}{408}\right)^2 + 2\right)}{2 \cdot \frac{577}{408}} = \frac{\left(\frac{332929}{20736} + 2\right)}{\frac{577}{204}} = \frac{665857}{470832} = 1{,}41421356237...$$

...

$$\lim_{n \to \infty} x_k = \sqrt{2}$$

Assim, $\sqrt{2} = \lim_{n \to \infty} x_k \cong 1{,}41421356237...$.

Tabela 2.1.5.1.3: Valores da sequência x_k

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{N(x_k)}$
0	2	2
1	2	3/2 = 1,5
2	3/2	17/12 = 1,416666 ...
3	17/12	577/408 = 1,414215686275 ...
4	577/408	665857/470832 = 1,41421356237 ...
...	...	...
∞	$\lim_{n \to \infty} x_k$	$\sqrt{2}$

2.1.5.2. O Método de Newton Intervalar

Por intuição, acredita-se que o Método de Newton Intervalar é uma extensão intervalar do Operador Newtoniano Real, i.e., definido como: N(X) = X – F(X)/F'(X), onde F(X) e F'(X) são extensões intervalares para as funções reais f(x) e f'(x).

Observa-se mais adiante, que o ***Método de Newton Intervalar definido dessa maneira será sempre divergente***. Por exemplo, para se calcular a raiz quadrada de 2, da função $f(x) = x^2 - 2 = 0$ no intervalo [1, 2], tem-se:

$F(X) = X^2 - [2, 2]$ e $F'(X) = [2, 2]\cdot X$

Para $X_0 = [1, 2]$, tem-se:

$$X_1 = X_0 - \frac{F(X_0)}{F'(X_0)}$$

$$X_1 = [1, 2] - \frac{[1, 2]^2 - [2, 2]}{[2, 2]\cdot[1, 2]} = [1, 2] - \frac{[1, 4] - [2, 2]}{[2, 4]} = [1, 2] - \frac{[-1, 2]}{[2, 4]} \Rightarrow$$

$$X_1 = [1, 2] - [-1, 2]\cdot\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] = [1, 2] - \left[-\frac{1}{2}, 1\right] = [1, 2] + \left[-1, \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

$\mathbf{X_1 = [0, 2{,}5]}$

$$X_2 = X_1 - \frac{F(X_1)}{F'(X_1)}$$

$$X_2 = [0, 2{,}5] - \frac{[0, 2{,}5]^2 - [2, 2]}{[2, 2]\times[0, 2{,}5]} = [0, 2{,}5] - \frac{[0, 6{,}25] - [2, 2]}{[0, 5]} = [0, 2{,}5] - \frac{[-2, 4{,}25]}{[0, 5]}$$

$$X_2 = [0, 2{,}5] - \left[\min\left\{\frac{-2}{5}, \frac{-2}{0}, \frac{4{,}25}{5}, \frac{4{,}25}{0}\right\};\ \max\left\{\frac{-2}{5}, \frac{-2}{0}, \frac{4{,}25}{5}, \frac{4{,}25}{0}\right\}\right] = ?$$

Portanto, o *diam*(X_1) = *diam*([0, 2,5]) = 2,5 > 1 = *diam*(X_0) e que $X_0 \subseteq X_1$, quando esperava-se que $X_0 \supseteq X_1$ – em outras palavras, esperava-se que o método produzisse uma sequência de intervalos encaixantes, i.e., convergisse. Observa-se também que a segunda iteração não foi concluída, devido o F'(X) = [2, 2]·[0, 2,5] = [0, 5] conter zero, conforme o teorema 2.1.1.13 da divisão intervalar.

Como se deseja que a sequência de intervalos X_k convirja para o intervalo pontual $[x_*; x_*]$, então é necessário que o *diam*(X_k) $\rightarrow$ 0, quando k $\rightarrow +\infty$. Mas, como:

diam(X_{k+1}) = *diam*(X_k - $\frac{F(X_k)}{F'(X_k)}$) = *diam*(X_k) + *diam* ($\frac{F(X_k)}{F'(X_k)}$) > *diam*(X_k), conclui-se que a sequência de intervalos definida por $X_{k+1} = X_k - \frac{F(X_k)}{F'(X_k)}$ é sempre divergente.

Para que haja convergência, é preciso que o diâmetro do último intervalo calculado X_{k+1} seja menor que o diâmetro do intervalo anterior X_k e ainda contenha x_* (raiz da equação). Deseja-se, portanto, construir uma sequência de intervalos encaixados $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq X_4 \supseteq ... \supseteq X_k \supseteq ... \supseteq [x_*; x_*]$, cujos diâmetros vão diminuindo à medida que o valor de k aumenta. Para isso, precisa-se avaliar apenas a derivada dentro dos intervalos, observando o intervalo resultante da avaliação intervalar da derivada para que o mesmo não contenha o zero. Dessa maneira, deve-se exigir que a função f não tenha *pontos críticos* (máximos e mínimos locais) em X_0.

Teorema 2.1.5.2.1: (*Método de Newton Intervalar.*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 60)

Seja f(x) uma função real contínua em X_0 = [a, b], de modo que $f(a)\cdot f(b) < 0$. Assim, existe $x_* \in X_0$ tal que $f(x_*) = 0$. Primeiro, calcula-se um intervalo M = [m_1, m_2], tal que $0 < m_1 \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq m_2 < +\infty$, $\forall x, y \in X_0$, com $x \neq y$, que servirá como uma inclusão intervalar para a imagem intervalar da derivada f'(x) da função f(x). Em seguida, define-se o Operador Newtoniano Intervalar por $N(X_k) = med(X_k) - \frac{f(med(X_k))}{M}$, obtendo-se a sequência intervalar recursiva $X_{k+1} = X_k \cap N(X_k)$ e X_0 = [a, b], que tem as seguintes propriedades:

1. $x_* \in X_k$, $\forall k \geq 0$;
2. $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq X_4 \supseteq ...$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} X_k = [x_*, x_*]$;
3. $d(X_{k+1}) \leq d(1 - \frac{m_1}{m_2}) \cdot d(X_k)$ $\therefore$ $d(X_{k+1}) \leq d(1 - \frac{m_1}{m_2})^k \cdot d(X_0)$, o que implica em $\lim\limits_{k\to+\infty} d(X_k) = 0$;
4. Se existe $k_0 \geq 0$ tal que $X_{k_0} \cap N(X_{k_0}) = \emptyset$, então não existe raiz da função no intervalo inicial X_0.

A propriedade 4, acima, garante a ***autovalidação do algoritmo***, ou seja, escolhendo-se um intervalo inicial que não contém a raiz da função, o método parará, caso contrário, ele calcula o intervalo limite da sequência X_k, que contém x_*, que é a raiz da função f, validando assim a resposta.

Exemplo: Calcular a raiz da função $f(x) = x^2 - 2 = 0$ em $X_0 = [1; 2]$.

Solução:

$f(x) = x^2 - 2$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua no intervalo inicial $X_0 = [1, 2]$. Tem-se que $f(a)\ f(b) = f(1)\cdot f(2) = (1^2 - 2)\ (2^2 - 2) = (-1)\ (2) = -2 < 0$, logo a função tem pelo menos uma raiz no intervalo [1, 2].

O cálculo da inclusão intervalar M para a derivada pode ser feito por:

$M = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dfrac{(x^2 - 2) - (y^2 - 2)}{x - y} = \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{(x - y)\cdot(x + y)}{x - y} = x + y$, e daí, tem-se que $0 < 2 \le \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y \le 4$, para quaisquer $x, y \in X_0 = [1, 2]$, pois $1 \le x \le 2$ e $1 \le y \le 2$. Logo, $1 + 1 \le x + y \le 2 + 2$.

1) **Derivada de f(x)**: $f(x) = x^2 - 2 \rightarrow$ $\mathbf{f'(x) = 2x}$
2) **Inclusão Intervalar**:

   $M = [m_1, m_2] = I(f'(x), (X_0)) = I(2x, [1, 2]) = [\min\{2x/x \in [1, 2]\}; \max\{2x/x \in [1, 2]\}]$
   $\rightarrow M = [2, 4]$.
3) **Operador Intervalar Newtoniano**:

   $N(X_k) = med(X_k) - \dfrac{f(med(X_k))}{M} = [med(X_k), med(X_k)] - \dfrac{[f(med(X_k)), f(med(X_k))]}{M}$,

   onde med(X) é o ponto médio do intervalo anterior.
4) $X_{k+1} = X_k \cap N(X_k)$.

Assim, para $X_0 = [1, 2]$ tem-se:

$med(X_0) = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} = \mathbf{1{,}5}$

$N(X_0) = [1{,}5,\ 1{,}5] - \dfrac{[(1{,}5)^2 - 2,\ (1{,}5)^2 - 2]}{[2,\ 4]} = [1{,}5,\ 1{,}5] - \dfrac{[0{,}25,\ 0{,}25]}{[2,\ 4]}$

$N(X_0) = [1{,}5,\ 1{,}5] - \left[\dfrac{0{,}25}{4}, \dfrac{0{,}25}{2}\right] = [1{,}5,\ 1{,}5] - \left[\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{8}\right] = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right] + \left[-\dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{16}\right]$

$N(X_0) = \left[\dfrac{11}{8}, \dfrac{23}{16}\right]$ = **[1,3, 1,5];**

$X_1 = [1, 2] \cap [1{,}3,\ 1{,}5] = \mathbf{[1{,}3,\ 1{,}5]}$

$\text{med}(X_1) = \dfrac{1{,}3 + 1{,}5}{2} = \dfrac{2{,}8}{2} = \mathbf{1{,}4}$

$N(X_1) = [1{,}4,\ 1{,}4] - \dfrac{\left[(1{,}4)^2 - 2,\ (1{,}4)^2 - 2\right]}{[2,\ 4]} = [1{,}4,\ 1{,}4] - \dfrac{[-0{,}04,\ -0{,}04]}{[2,\ 4]}$

$N(X_1) = [1{,}4,\ 1{,}4] - \left[-\dfrac{0{,}04}{4}, -\dfrac{0{,}04}{2}\right] = [1{,}4,\ 1{,}4] + [0{,}02,\ 0{,}01] = [1{,}42,\ 1{,}41]$

$N(X_1) = = \mathbf{[1{,}41,\ 1{,}42];}$

$X_2 = [1{,}3,\ 1{,}5] \cap [1{,}41,\ 1{,}42] = \mathbf{[1{,}41,\ 1{,}42]}$

$\text{med}(X_2) = \dfrac{1{,}41 + 1{,}42}{2} = \dfrac{2{,}83}{2} = \mathbf{1{,}415}$

$N(X_2) = [1{,}415,\ 1{,}415] - \dfrac{\left[(1{,}415)^2 - 2,\ (1{,}415)^2 - 2\right]}{[2,\ 4]} = [1{,}415,\ 1{,}415] - \dfrac{[0{,}0022,\ 0{,}0022]}{[2,\ 4]}$

$N(X_2) = [1{,}415,\ 1{,}415] - \left[\dfrac{0{,}0022}{4}, \dfrac{0{,}0022}{2}\right] = [1{,}415,\ 1{,}415] - [0{,}00056,\ 0{,}0011]$

$N(X_2) = [1{,}415,\ 1{,}415] + [-0{,}0011,\ -0{,}00056] = \mathbf{[1{,}414,\ 1{,}415];}$

$X_3 = [1{,}41,\ 1{,}42] \cap [1{,}414,\ 1{,}415] = \mathbf{[1{,}414,\ 1{,}415]}$

$\text{med}(X_3) = \dfrac{1{,}414 + 1{,}415}{2} = \dfrac{2{,}829}{2} = \mathbf{1{,}4145}$

etc.

Tabela 2.1.5.2.2: Valores da sequência X_k e do Operador Newtoniano Intervalar

K	X_k	$N(X_k)$
0	[1; 2]	[1,3; 1,5]
1	[1,3; 1,5]	[1,41; 1,42]
2	[1,41; 1,42]	[1,414; 1,415]
3	[1,414; 1,415]	[1,4142; 1,4143]
4	[1,4142; 1,4143]	[1,414212; 1,414215]
5	[1,414212; 1,414215]	[1,4142135; 1,4142137]
6	[1,4142135; 1,4142137]	[1,41421355; 1,41421357]
7	[1,41421355; 1,41421357]	[1,414213562; 1,414213563]
8	[1,414213562; 1,414213563]	[1,4142135623; 1,4142135624]
9	[1,4142135623; 1,4142135624]	[1,414213562372; 1,414213562374]
10	[1,414213562372; 1,414213562374]	[1,4142135623730; 1,4142135623732]
11	[1,4142135623730; 1,4142135623732]	[1,41421356237309; 1,41421356237310]
12	[1,41421356237309; 1,41421356237310]	[1,414213562373094; 1,414213562373096]
13	**[1,414213562373094; 1,414213562373096]**	

Logo, o valor da raiz da função $f(x) = x^2 - 2$ é um valor real $x_* \in$ [1,414213562373094, 1,414213562373096].

2.1.5.3: Variações do Método de Newton Intervalar

Será mostrado a seguir, dois tipos de variações do Método de Newton Intervalar. A diferença entre uma e outra, está no aumento da velocidade de convergência, i.e., o segundo tipo de variação, converge em menos iterações, comparado com o primeiro tipo.

VARIAÇÃO 1

Consiste em substituir a inclusão intervalar pela derivada e assim atualizá-la a cada iteração, ou seja, substituir "M" por F'(X) no cálculo do Operador Newtoniano Intervalar, onde F'(X) é uma avaliação intervalar ou uma extensão intervalar da derivada f'(x) da função real.

Teorema 2.1.5.3.1: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 63)
Seja f(x) uma função real contínua em $X_0 = [a, b]$, de modo que $f(a)\cdot f(b) < 0$. Assim, $\exists x_* \in X_0$ tal que $f(x_*) = 0$. Seja F'(X) uma extensão intervalar da derivada f'(x) da função f(x). O *Operador Newtoniano Intervalar* é definido por $N_1(X) = med(X) - f(med(X))/F'(X)$, onde med(X) é o ponto médio do intervalo X e a sequência intervalar é construída recursivamente, onde $X_{k+1} = X_k \cap N_1(X_k)$ e $X_0 = [a, b]$.

Exemplo:

1) Calcular a raiz da função $f(x) = x^2 - 2 = 0$ em $X_0 = [1, 2]$, usando este novo *Operador Newtoniano Intervalar*.

Solução:

1º) Derivada da função f(x): $f(x) = x^2 - 2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x$

2º) Avaliação Intervalar: $F'(X) = 2X = [2; 2]\cdot X$

3º) Cálculo do Operador Intervalar Newtoniano $N_1(X_k)$:

$$N_1(X_k) = [med(X_k), med(X_k)] - \frac{\left[(med(X_k))^2 - 2,\ (med(X_k))^2 - 2\right]}{[2,\ 2]\cdot X_k}, \text{ onde}$$

$$med(X_k) = \frac{a+b}{2}.$$

Assim,

X_0 = **[1, 2]** e $med(X_0) = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$ = **1,5**

$N_1(X_0) = [1{,}5,\ 1{,}5] - \dfrac{\left[(1{,}5)^2 - 2,\ (1{,}5)^2 - 2\right]}{[2,\ 2]\cdot[1,\ 2]} = [1{,}5,\ 1{,}5] - \dfrac{[0{,}25,\ \ 0{,}25]}{[2,\ 4]}$

$N_1(X_0) = [1{,}5,\ 1{,}5] - \left[\dfrac{0{,}25}{4},\ \dfrac{0{,}25}{2}\right] = [1{,}5,\ 1{,}5] + \left[-\dfrac{0{,}25}{2},\ -\dfrac{0{,}25}{4}\right]$ = **[1,3, 1,5];**

$X_1 = [1,\ 2] \cap [1{,}3,\ 1{,}5]$ **= [1,3; 1,5]** e $med(X_1) = \dfrac{1{,}3+1{,}5}{2} = \dfrac{2{,}8}{2}$ = **1,4**

$N_1(X_1) = [1{,}4,\ 1{,}4] - \dfrac{\left[(1{,}4)^2 - 2,\ (1{,}4)^2 - 2\right]}{[2,\ 2]\cdot[1{,}3,\ \ 1{,}5]} = [1{,}4,\ 1{,}4] - \dfrac{[-0{,}04,\ \ -0{,}04]}{[2{,}6,\ \ 3]}$

$N_1(X_1) = [1{,}4,\ 1{,}4] - \left[-\dfrac{0{,}04}{3},\ -\dfrac{0{,}04}{2{,}6}\right] = [1{,}4,\ 1{,}4] + \left[\dfrac{0{,}04}{2{,}6},\ \dfrac{0{,}04}{3}\right]$

$N_1(X_1)$ = [1,4, 1,4] + [0,015385, 0,013333] = [1,415385, 1,413333] = **[1,414, 1,415];**

$X_2 = [1{,}3,\ 1{,}5] \cap [1{,}414,\ 1{,}415]$ = **[1,414, 1,415]** e

$med(X_2) = \dfrac{1{,}414+1{,}415}{2} = \dfrac{2{,}829}{2}$ = **1,4145**

$N_1(X_2) = [1{,}4145,\ 1{,}4145] - \dfrac{\left[(1{,}4145)^2 - 2,\ (1{,}4145)^2 - 2\right]}{[2;\ \ 2]\cdot[1{,}414,\ \ 1{,}415]}$

$N_1(X_2) = [1{,}4145,\ 1{,}4145] - \dfrac{[0{,}00081025,\ \ 0{,}00081025]}{[2{,}828,\ \ 2{,}83]}$

$N_1(X_2) = [1{,}4145,\ 1{,}4145] - \left[\dfrac{0{,}00081025}{2{,}83},\ \dfrac{0{,}00081025}{2{,}828}\right]$

$N_1(X_2) = [1{,}4145,\ 1{,}4145] + \left[-\dfrac{0{,}00081025}{2{,}828},\ -\dfrac{0{,}00081025}{2{,}83}\right]$

$N_1(X_2)$ = [1,4145, 1,4145] + [-0,0002865099, -0,0002863074]

$N_1(X_2)$ = **[1,4142134901, 1,4142136926];**

X_3 = [1,414, 1,415] $\cap$ [1,4142134901, 1,4142136926] **= [1,4142134901, 1,4142136926]**

$med(X_3) = \dfrac{1{,}4142134901+1{,}4142136926}{2} = \dfrac{2{,}8284271827}{2}$ = **1,41421359135**

$N_1(X_3) = [1{,}41421359135,\ 1{,}41421359135] - \dfrac{\left[(1{,}41421359135)^2 - 2,\ (1{,}41421359135)^2 - 2\right]}{[2,\ 2]\cdot[1{,}4142134901,\ 1{,}4142136926]}$

$N_1(X_3) = [1{,}41421359135,\ 1{,}41421359135] - \left[\dfrac{0{,}000000081959}{2{,}8284273852},\ \dfrac{0{,}000000081959}{2{,}8284269802}\right]$

$N_1(X_3) = [1{,}41421359135,\ 1{,}41421359135] + \left[-\dfrac{0{,}000000081959}{2{,}8284269802},\ -\dfrac{0{,}000000081959}{2{,}8284273852}\right]$

$N_1(X_3)$ = [1,41421359135, 1,41421359135] + [-0,0000000289768838, -0,0000000289768797]

$N_1(X_3)$ **=[1,41421356237311, 1,41421356237312];**

X_4 = [1,4142134901, 1,4142136926] $\cap$ [1,41421356237311, 1,41421356237312]

X_4 = **[1,41421356237311, 1,41421356237312]**

Etc.

Tabela 2.1.5.3.2: Valores da sequência $X_{k+1} = X_k \cap N_1(X_k)$

k	X_k
0	[1, 2]
1	[1,3, 1,5]
2	[1,414, 1,415]
3	[1,4142134901, 1,4142136926]
4	[1,41421356237311, 1,41421356237312]
5	[1,41421356237311, 1,41421356237312]
6	[1,41421356237311, 1,41421356237312]
7	[1,41421356237311, 1,41421356237312]

Logo, o valor da raiz da função $f(x) = x^2 - 2$ é um valor real $x_* \in$ [1,41421356237311, 1,41421356237312]. Pode-se observar que o limite é o mesmo, porém, o número de iterações é menor do que o número de iterações da versão normal do Método de Newton Intervalar.

VARIAÇÃO 2

Consiste em substituir a inclusão intervalar pela derivada e assim atualizá-la a cada iteração (como na variação 1) e, ao invés do ponto médio do intervalo X_k, usa-se o *Operador Newtoniano Real* $n(x_k) = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ para calcular o *Operador Newtoniano Intervalar* $N_2(X_k)$, onde $x_k = med(X_k)$, $X_{k+1} = X_k \cap N_2(X_k)$ e $X_0 = [a; b]$.

Teorema 2.1.5.3.3: (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 64)

Seja f(x) uma função real contínua em $X_0 = [a, b]$, de modo que $f(a)\cdot f(b) < 0$. Assim, $\exists x_* \in X_0$ tal que $f(x_*) = 0$. Seja F'(X) uma extensão intervalar da derivada f'(x) da função f(x). Por último, define-se o *Operador Newtoniano Intervalar* a partir do *Operador Newtoniano Real*.

Para $X_0 = [a, b]$ e $x_0 = med(X_0) = \frac{a+b}{2}$, tem-se:

1º) $n(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \in \mathbb{R}$, que corresponde a tomar uma nova aproximação para a raiz, usando o *Método de Newton Real*;

2º) $N_2(X_k) = [n(x_k), n(x_k)] - \dfrac{[f(n(x_k)),\ f(n(x_k))]}{F'(X_k)}$, Operador Newtoniano Intervalar da variação 2;

3º) Obtém-se a sequência intervalar recursiva $X_{k+1} = X_k \cap N_2(X_k)$, onde $X_0 = [a, b]$.

Exemplo:

1) Calcular a raiz da função $f(x) = x^2 - 2 = 0$ em $X_0 = [1, 2]$, usando o segundo Operador Newtoniano Intervalar.

<u>Solução</u>:

1º) Derivada da função f(x): $f(x) = x^2 - 2 \rightarrow f'(x) = \mathbf{2x}$

2º) Avaliação Intervalar: $F'(X) = 2X = \mathbf{[2, 2]\cdot X}$ (extensão intervalar de f'(x))

3º) Operadores Newtoniano:

- $n(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^2 - 2}{2x_k}$ (Real)
- $N_2(X_k) = [n(x_k), n(x_k)] - \dfrac{[n(x_k)^2 - 2,\ n(x_k)^2 - 2]}{[2, 2]\cdot X_k}$ (Intervalar)

4º) $x_k = \text{med}(X_k) = \dfrac{a+b}{2}$

5º) Sequência: $X_{k+1} = X_k \cap N_2(X_k)$.

Assim, para $X_0 = [1, 2]$ e $x_0 = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} = \mathbf{1{,}5}$, tem-se:

1) $n(x_0) = x_0 - \dfrac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1{,}5 - \dfrac{(1{,}5)^2 - 2}{2\cdot 1{,}5} = 1{,}5 - \dfrac{0{,}25}{3} = 1{,}5 - 0{,}083 = \mathbf{1{,}417}$

2) $N_2(X_0) = [1{,}417,\ 1{,}417] - \dfrac{[(1{,}417)^2 - 2,\ (1{,}417)^2 - 2]}{[2, 2]\cdot[1, 2]}$

$N_2(X_0) = [1{,}417,\ 1{,}417] - \dfrac{[0{,}007889,\ 0{,}007889]}{[2, 4]} = [1{,}417,\ 1{,}417] - \left[\dfrac{0{,}007889}{4}, \dfrac{0{,}007889}{2}\right]$

$N_2(X_0) = [1{,}417,\ 1{,}417] + \left[-\dfrac{0{,}007889}{2}, -\dfrac{0{,}007889}{4}\right]$

$N_2(X_0) = [1{,}417,\ 1{,}417] + [-\ 0{,}0039445,\ -\ 0{,}00197225] = \mathbf{[1{,}413,\ 1{,}415];}$

$X_1 = [1, 2] \cap [1{,}413,\ 1{,}415] =$ **[1,413, 1,415]** e $x_1 = \dfrac{1{,}413 + 1{,}415}{2} = \dfrac{2{,}828}{2} =$ **1,414**

1) $n(x_1) = 1{,}414 - \dfrac{(1{,}414)^2 - 2}{2 \cdot 1{,}414} = 1{,}414 + \dfrac{0{,}000604}{2{,}828} = 1{,}414 + 0{,}0002135785 =$ **1,4142**

2) $N_2(X_1) = [1{,}4142,\ 1{,}4142] - \dfrac{\left[(1{,}4142)^2 - 2,\ (1{,}4142)^2 - 2\right]}{[2,\ 2] \cdot [1{,}413,\ 1{,}415]}$

$N_2(X_1) = [1{,}4142,\ 1{,}4142] - \dfrac{[-0{,}00003836,\ -0{,}00003836]}{[2{,}826,\ 2{,}83]}$

$N_2(X_1) = [1{,}4142,\ 1{,}4142] - \left[\dfrac{-0{,}00003836}{2{,}83}, \dfrac{-0{,}00003836}{2{,}826}\right]$

$N_2(X_1) = [1{,}4142,\ 1{,}4142] + \left[\dfrac{0{,}00003836}{2{,}826}, \dfrac{0{,}00003836}{2{,}83}\right]$

$N_2(X_1) = [1{,}4142,\ 1{,}4142] + [0{,}000013573956,\ 0{,}00001355477]$

$N_2(X_1) =$ **[1,414186426044, 1,41418644523];**

$X_2 = [1{,}413,\ 1{,}415] \cap [1{,}414186426044,\ 1{,}41418644523] =$

$X_2 =$ **[1,414186426044, 1,41418644523]** e

$x_2 = \dfrac{1{,}414186426044 + 1{,}41418644523}{2} =$ **1,414186**

1) $n(x_2) = 1{,}414186 - \dfrac{(1{,}414186)^2 - 2}{2 \cdot 1{,}414186} = 1{,}414186 + \dfrac{0{,}0000779574}{2{,}828372}$

$n(x_2) = 1{,}414186 + 0{,}00002756264 =$ **1,41421356**

2) $N_2(X_2) = [1{,}41421356,\ 1{,}41421356] - \dfrac{\left[(1{,}41421356)^2 - 2,\ (1{,}41421356)^2 - 2\right]}{[2,\ 2] \cdot [1{,}414186426,\ 1{,}414186444]}$

$N_2(X_2) = [1{,}41421356,\ 1{,}41421356] - \left[\dfrac{0{,}000000000755}{2{,}828372852}, \dfrac{0{,}000000000755}{2{,}828372888}\right]$

$N_2(X_2) = [1{,}41421356,\ 1{,}41421356] + \left[-\dfrac{0{,}000000000755}{2{,}828372888}, -\dfrac{0{,}000000000755}{2{,}828372852}\right]$

$N_2(X_2) = [1{,}41421356,\ 1{,}41421356] + [-0{,}000000000266937928,\ -0{,}000000000266937932]$

$N_2(X_2) = [1{,}414213559733062072,\ 1{,}414213559733062068]$

$N_2(X_2) =$ **[1,414213559733062068, 1,414213559733062072];**

$X_3 = [1{,}414186426044,\ 1{,}41418644523] \cap [1{,}414213559733062068,\ 1{,}414213559733062072] =$

$X_3 =$**[1,414213559733062068, 1,414213559733062072]**

Etc.

Tabela 2.1.5.3.4: Valores da sequência $X_{k+1} = X_k \cap N_1(X_k)$

k	X_k
0	[1, 2]
1	[1,413, 1,415]
2	[1,414186426044, 1,41418644523]
3	**[1,414213559733062068, 1,414213559733062072]**
4	**[1,414213559733062068, 1,414213559733062072]**

Logo, o valor da raiz da função $f(x) = x^2 - 2$ é um valor real $x_* \in$ [1,414213559733062068, 1,414213559733062072].

Pode-se observar que o limite é praticamente o mesmo e o número de iterações é menor do que o número de iterações da versão normal do Método de Newton Intervalar e menor, também, do que o número de iterações da variação 1. Confirmando, portanto, o aumento da velocidade de convergência da primeira para a segunda variação.

2.1.6. ARITMÉTICA INTERVALAR COMPLEXA

Esta subseção apresentará as definições básicas da aritmética intervalar complexa, do ponto de vista de (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 1997, p. 67-71).

Definição 2.1.6.1: (*Plano Complexo*)

Seja $i = \sqrt{-1}$. Denota-se por $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os pontos do tipo a + bi, onde a, b $\in \mathbb{R}$. Este conjunto, munido das operações aritméticas: soma, oposto, diferença, produto, inverso e quociente, é chamado ***plano complexo***.

Exemplo:

Os números $4 + i$, $3 + 2i$, $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$, $\sqrt{2}\,i$, $\pi + 5i$ são alguns exemplos de números complexos.

Definição 2.1.6.2: (*Intervalo Complexo*)

Sejam A, B $\in$ IR dois intervalos. Então, o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi,\ a \in A,\ b \in B\}$ e um intervalo complexo e será denotado por Z = A + Bi, onde $i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = -1$. Este conjunto constitui um retângulo no plano complexo, cujos lados são paralelos aos eixos de coordenadas.

Definição 2.1.6.3: (*Conjunto I$\mathbb{C}$*)

Denota-se por I$\mathbb{C}$ o conjunto de todos os intervalos complexos, i.e., I$\mathbb{C}$ = {A + Bi / A, B $\in$ IR}.

Observa-se que todo número complexo $z \in \mathbb{C}$ pode ser visto como um ponto de I$\mathbb{C}$, basta representar os pontos de $z \in \mathbb{C}$ como intervalos degenerados, ou seja, [a, a] + [b, b]i. Como também, todo intervalo de IR pode ser visto como um intervalo de I$\mathbb{C}$, por exemplo, o intervalo A $\in$ IR pode ser representado em I$\mathbb{C}$ como A + [0, 0]i. Dessa maneira, IR $\subseteq$ I$\mathbb{C}$.

Exemplos:

1) Os intervalos [1, 2] + [3, 4]i, [4, 4] – [-2, 7]i, [-4, 4] + [4, 6]i e [2, 2] + [3, 3]i são alguns exemplos de elementos de I$\mathbb{C}$.

2) [2, 2] + [3, 3]i corresponde ao próprio número complexo 2 + 3i. Por outro lado, [-4, 4] pode ser representado como um intervalo complexo, i.e., [-4, 4] + [0, 0]i.

Definição 2.1.6.4: (*Igualdade entre Intervalos Complexos*)

Sejam X = A + Bi e Y = C + Di dois pontos de $I\mathbb{C}$. Diz-se que X = Y se, e somente se, A = C e B = D.

Exemplo:

Qual o número complexo A de $I\mathbb{C}$, tal que A = B e B = [3, 5] + [-1, 3]i ?

Como A = B $\Rightarrow$ A = [3, 5] + [-1, 3]i.

Definição 2.1.6.5: (*Operações Aritméticas Complexas*)

Sejam X = A + Bi, Y = C + Di $\in I\mathbb{C}$ dois intervalos complexos. As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão em $I\mathbb{C}$, são definidas através das operações aritméticas intervalares básicas. Isto é:

1. X + Y = (A + C) + (B + D)i
2. X – Y = (A – C) + (B – D)i
3. X · Y = (A·C - B·D) + (A·D + B·C)i
4. $\frac{X}{Y} = \frac{A \cdot C - B \cdot D}{C^2 + D^2} + \left(\frac{B \cdot C - A \cdot D}{C^2 + D^2}\right)i$, para $0 \notin (C^2 + D^2)$.

Exemplo:

a) ([2, 3] + [5, 6]i) + ([-2, 4] + [5, 7]i) = **[0, 7] + [10, 13]i**

b) - ([2, 3] + [4, 5]i) = **[-3, -2] + [-5, -4]i**

c) ([2, 3] + [-3, -1]i) - ([4, 5] + [3, 6]i) = ([2, 3] + [-3, -1]i) + ([-5, -4] + [-6, -3]i) = **[-3, -1] + [-9, -4]i**

d) ([2, 3] + [1, 1]i) × ([4, 5] + [0, 3]i) = ([8, 15] - [0, 3]) + ([0, 9] + [4, 5])i = ([8, 15] + [-3, 0]) + ([0, 9] + [4, 5])i = **[5, 15] + [4, 14]i**

e) ([2, 3] + [1, 1]i) / ([1, 2] + [4, 5]i) =

$$\frac{[2, 3]\cdot[1, 2]+[1, 1]\cdot[4, 5]}{[1, 2]^2+[4, 5]^2} + \left(\frac{[1, 1]\cdot[1, 2]-[2, 3]\cdot[4, 5]}{[1, 2]^2+[4, 5]^2}\right)i =$$

$$\frac{[2, 6]+[4, 5]}{[1, 2]^2+[4, 5]^2} + \left(\frac{[1, 2]-[8, 15]}{[1, 2]^2+[4, 5]^2}\right)i = \frac{[6, 11]}{[1, 4]+[16, 25]} + \left(\frac{[1, 2]+[-15, -8]}{[1, 4]+[16, 25]}\right)i =$$

$$\frac{[6, 11]}{[17, 29]} + \frac{[-14, -6]i}{[17, 29]} = \left[\frac{6}{29}, \frac{11}{17}\right] + \left[\frac{-14}{29}, \frac{-6}{17}\right]i = \left[\frac{6}{29}, \frac{11}{17}\right] - \left[\frac{6}{17}, \frac{14}{29}\right]i.$$

Teorema 2.1.8.6: (*Propriedades Algébricas*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 69).
Sejam X, Y, Z ∈ $I\mathbb{C}$ intervalos complexos. Então, valem as seguintes propriedades:

1. $X + Y = Y + X$;
2. $X \cdot Y = Y \cdot X$;
3. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$;
4. $\exists!\ 0 = [0, 0] + [0, 0]i \in I\mathbb{C}$ tal que $X + 0 = 0 + X = X$
5. $\exists!\ 1 = [1, 1] + [0, 0]i \in I\mathbb{C}$ tal que $X \cdot 1 = 1 \cdot X = X$
6. $X \cdot (Y + Z) \subseteq (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$.

Demonstração: Sejam os intervalos complexos algébricos: $X = [a, b] + [c, d]i$, $Y = [e, f] + [g, h]i$ e $Z = [x, y] + [r, s]i$. Então, tem-se:

1) $\Rightarrow)$ $X + Y = ([a, b] + [e, f]) + ([c, d] + [g, h])i = [a + e, b + f] + [c + g, d + h]i$

$= [e + a, f + b] + [g + c, h + d]i = \mathbf{Y + X}$

$\Leftarrow)$ $Y + X = ([e, f] + [a, b]) + ([g, h] + [c, d])i = [e + a, f + b] + [g + c, h + d]i$

$= [a + e, b + f] + [c + g, d + h]i = \mathbf{X + Y}$

Logo, **X + Y = Y + X**.

2) $\Rightarrow)$ $X \cdot Y = ([a, b] \cdot [e, f] - [c, d] \cdot [g, h]) + ([a, b] \cdot [g, h] + [c, d] \cdot [e, f])i$

$= ([\min\{a \cdot e, a \cdot f, b \cdot e, b \cdot f\}, \max\{a \cdot e, a \cdot f, b \cdot e, b \cdot f\}] - [\min\{c \cdot g, c \cdot h, d \cdot g, d \cdot h\}, \max\{c \cdot g, c \cdot h, d \cdot g, d \cdot h\}]) + ([\min\{a \cdot g, a \cdot h, b \cdot g, b \cdot h\}, \max\{a \cdot g, a \cdot h, b \cdot g, b \cdot h\}] + [\min\{c \cdot e, c \cdot f, d \cdot e, d \cdot f\}, \max\{c \cdot e, c \cdot f, d \cdot e, d \cdot f\}])i$

$= ([\min\{e \cdot a, f \cdot a, e \cdot b, f \cdot b\}, \max\{e \cdot a, f \cdot a, e \cdot b, f \cdot b\}] - [\min\{g \cdot c, h \cdot c, g \cdot d, h \cdot d\}, \max\{g \cdot c, h \cdot c, g \cdot d, h \cdot d\}]) + ([\min\{g \cdot a, h \cdot a, g \cdot b, h \cdot b\}, \max\{g \cdot a, h \cdot a, g \cdot b, h \cdot b\}] + [\min\{e \cdot c, f \cdot c, e \cdot d, f \cdot d\}, \max\{e \cdot c, f \cdot c, e \cdot d, f \cdot d\}])i$

$= Y \cdot X$

$\Leftarrow)$ $Y \cdot X = ([e, f] \cdot [a, b] - [g, h] \cdot [c, d]) + ([g, h] \cdot [a, b] + [e, f] \cdot [c, d])i$

$= ([\min\{e \cdot a, e \cdot b, f \cdot a, f \cdot b\}, \max\{e \cdot a, e \cdot b, f \cdot a, f \cdot b\}] - [\min\{g \cdot c, g \cdot d, h \cdot c, h \cdot d\}, \max\{g \cdot c, g \cdot d, h \cdot c, h \cdot d\}]) + ([\min\{g \cdot a, g \cdot b, h \cdot a, h \cdot b\}, \max\{g \cdot a, g \cdot b, h \cdot a, h \cdot b\}] + [\min\{e \cdot c, e \cdot d, f \cdot c, f \cdot d\}, \max\{e \cdot c, e \cdot d, f \cdot c, f \cdot d\}])i$

$= ([\min\{a\cdot e,\ b\cdot e,\ a\cdot f,\ b\cdot f\}, \max\{a\cdot e,\ b\cdot e,\ a\cdot f,\ b\cdot f\}] - [\min\{c\cdot g,\ d\cdot g,\ c\cdot h,\ d\cdot h\}, \max\{c\cdot g,\ d\cdot g,\ c\cdot h,\ d\cdot h\}]) + ([\min\{a\cdot g,\ b\cdot g,\ a\cdot h,\ b\cdot h\}, \max\{a\cdot g,\ b\cdot g,\ a\cdot h, b\cdot h\}] + [\min\{c\cdot e,\ d\cdot e,\ c\cdot f,\ d\cdot f\}, \max\{c\cdot e,\ d\cdot e,\ c\cdot f,\ d\cdot f\}])i$

$= X\cdot Y.$

Logo, **Y·X = X·Y**.

A demonstração das demais propriedades não será apresentada por se considerar trivial. Pode-se verificar as propriedades acima, através do seguinte exemplo:

Sejam X = [1, 2] + [3, 4]i, Y = [-2, 0] + [1, 3]i e Z = [0, 2] + [4, 4]i. Então, tem-se:

1) X + Y = [-1, 2] + [4, 7]i

Y + X = [-1, 2] + [4, 7]i

⇒ **X + Y = Y + X.** (***Propriedade Comutativa da Adição***)

2) X·Y = ([-4, 0] – [3, 12]) + ([1, 6] + [-8, 0])i = [-16, -3] + [-7, 6]i

Y·X = ([-4, 0] – [3, 12]) + ([-8, 0] + [1, 6])i = [-16, -3] + [-7, 6]i

⇒ **X·Y = Y·X.** (***Propriedade Comutativa da Multiplicação***)

3) X + (Y + Z) = [1, 2] + [3, 4]i + ([-2, 0] + [1, 3]i + [0, 2] + [4, 4]i)

= [1, 2] + [3, 4]i + [-2, 2] + [5, 7]i = [-1, 4] + [8, 11]i

(X + Y) + Z = ([1, 2] + [3, 4]i + [-2, 0] + [1, 3]i) + [0, 2] + [4, 4]i

= [-1, 2] + [4, 7]i + [0, 2] + [4, 4]i = [-1, 4] + [8, 11]i

⇒ **X + (Y + Z) = (X + Y) + Z**. (***Propriedade Associativa da Adição***)

4) X · (Y + Z) = ([1, 2] + [3, 4]i) · ([-2, 2] + [5, 7]i)

= ([1, 2]·[-2, 2] – [3, 4]·[5, 7]) + ([1, 2]·[5, 7] + [3, 4]·[-2, 2])i

= ([-4, 4] – [15, 28]) + ([5, 14] + [-8, 8])i

= **[-32, -11] + [-3, 22]i**

(X·Y) + (X·Z) = ([1, 2] + [3, 4]i) · ([-2, 0] + [1, 3]i) + ([1, 2] + [3, 4]i) · ([0, 2] + [4, 4]i)

= ([-4, 0] - [3, 12]) + ([1, 6] + [-8, 0])i + ([0, 4] - [12, 16]) + ([4, 8] + [0, 8])i

= [-16, -3] + [-7, 6]i + [-16, -8] + [4, 16]i

= **[-32, -11] + [-3, 22]i**

Logo, **X · (Y + Z) $\subseteq$ (X·Y) + (X·Z)** (***Propriedade da subdistributividade***).

A seguir, algumas propriedades topológicas dos intervalos complexos.

Definição 2.1.6.7: (*Distância entre dois intervalos complexos*)

Sejam X = A + Bi e Y = C + Di dois pontos de $I\mathbb{C}$ e d(X, Y) como sendo a distância usual de IR. Define-se a distância do ponto X ao ponto Y como sendo o número real não negativo đ = d(X, Y) = d(A, C) + d(B, D).

Exemplos:

Dados X = [2, 5] + [2, 3]i, Y = [-2, -1] + [-1, 1]i e Z = [-3, 2] + [-5, -5]i, encontrar:

1) d(X, Y) = d([2, 5], [-2, -1]) + d([2, 3], [-1, 1]) = 6 + 3 = 9
2) d(Y, Z) = d([-2, -1], [-3, 2]) + d([-1, 1], [-5, -5]) = 3 + 6 = 9
3) d(X, Z) = d([2, 5], [-3, 2]) + d([2, 3], [-5, -5]) = 5 + 8 = 13
4) d(X, Y) + d(Y, Z) = 9 + 9 = 18.

Definição 2.1.6.8: (*Módulo de um intervalo complexo*)

Seja X = A + Bi ∈ $I\mathbb{C}$ um intervalo complexo. Define-se o módulo de X como sendo o número real não negativo M = $|X|$ = d(X, 0) = $|A| + |B|$, que corresponde à distância do ponto X ao zero.

Exemplos: Dados X = [-3, 4] + [2, 3]i, Y = [-4, -1] + [-5, 2]i. encontrar:

1) $|X| = |[-3, 4]| + |[2, 3]| = 4 + 3 = 7$
2) $|Y| = |[-4, -1]| + |[-5, 2]| = 4 + 5 = 9$
3) $|X + Y| = |([-3, 4] + [-4, -1]) + ([2, 3] + [-5, 2])i| = |[-7, 3] + [-3, 5]i| =$

   $= |[-7, 3]| + |[-3, 5]| = 7 + 5 = 12$
4) $|X| + |Y| = 7 + 9 = 16$.

Teorema 2.1.6.9: (*Propriedades*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 70)

Sejam X, Y, Z, W ∈ $I\mathbb{C}$ intervalos complexos. Então, valem as seguintes propriedades:

1) d(Y + X, Y + Z) = d(X, Z);
2) d(Y·X, Y·Z) ≤ $|Y|$ · d(X, Z);
3) d(Y + X, Z + W) ≤ d(Y, Z) + d(X, W);
4) $|X| \geq 0$ e $|X| = 0 \Leftrightarrow X = 0$;
5) $|Y + X| \leq |Y| + |X|$;
6) $|Y \cdot X| \leq |Y| \cdot |X|$;
7) Se $Y \subseteq X \Rightarrow |Y| \leq |X|$.

Definição 2.1.6.10: (*Diâmetro de um intervalo complexo*)

Seja X = A + Bi ∈ $I\mathbb{C}$ um intervalo complexo. O diâmetro de X é o número real não negativo diam(X) = diam(A) + diam(B).

Exemplos:

Dados os intervalos complexos: X = [-2, 0] + [1, 1]i, Y = [2, 6] + [-2, 2]i, Z = [-4, 1] + [0, 5] e W = [4, 4] + [0, 5]i, encontrar:

1) diam(X) = diam([-2, 0]) + diam([1, 1]) = 2 + 0 = 2
2) diam(Y) = diam([2, 6]) + diam([-2, 2]) = 4 + 4 = 8
3) diam(Z) = diam([-4, 1]) + diam([0, 5]) = 5 + 5 = 10
4) diam(W) = diam([4, 4]) + diam([0, 5]) = 0 + 5 = 5.

Teorema 2.1.6.11: (*Propriedades*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 71)

Sejam X, Y ∈ $I\mathbb{C}$ intervalos complexos. Então, valem as seguintes propriedades:

1) $\text{diam}(X \cdot Y) \leq |X| \cdot \text{diam}(Y) + |Y| \cdot \text{diam}(X)$;
2) $\text{diam}(X) = |X - X|$;
3) $\text{diam}(X \cdot Y) \geq |X| \cdot \text{diam}(Y)$;
4) diam(X + Y) = diam(X) + diam(Y);
5) diam(X - Y) = diam(X) + diam(Y);
6) Se $X \subseteq Y$, então $\text{diam}(X) \leq \text{diam}(Y)$;
7) Se $X \subseteq Y$, então $(\text{diam}(Y) - \text{diam}(X))/2 \leq d(X, Y) \leq \text{diam}(Y) - \text{diam}(X)$.

Definição 2.1.6.12: (*Interseção de intervalos complexos*)

Sejam X = A + Bi e Y = C + Di dois intervalos complexos. A interseção de X com Y é o intervalo $I = X \cap Y = (A \cap C) + (B \cap D)i$.

Exemplos:

Dados os intervalos complexos: X = [1, 5] + [-2, 6]i, Y = [-2, 4] + [1, 4]i e Z = [5, 10] + [5, 8]i, encontrar:

1º) $X \cap Y = ([1, 5] \cap [-2, 4]) + ([-2, 6] \cap [1, 4])i =$ **[1, 4] + [1, 4]i**;

2º) $X \cap Z = ([1, 5] \cap [5, 10]) + ([-2, 6] \cap [5, 8])i =$ **[5, 5] + [5, 6]i**;

3º) $Y \cap Z = ([-2, 4] \cap [5, 10]) + ([1, 4] \cap [5, 8])i = \varnothing + \varnothing\mathbf{i} = \varnothing$

Corolário 2.1.6.13: (*Monotonicidade*) (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 97, p. 71)

Sejam X, Y, Z, W $\in$ I$\mathbb{C}$ intervalos complexos. Se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq W$, então $X \cap Y \subseteq Z \cap W$.

Exemplos:

Dados os intervalos complexos: X = [1, 3] + [-1, 4]i, Y = [2, 4] + [1, 3]i, Z = [-2, 4] + [-2, 5]i e W = [1, 6] + [0, 5]i, encontrar:

1º) $X \cap Y$ = ([1, 3] $\cap$ [2, 4]) + ([-1, 4] $\cap$ [1, 3])i = **[2, 3] + [1, 3]i**;

2º) $Z \cap W$ = ([-2, 4] $\cap$ [1, 6]) + ([-2, 5] $\cap$ [0, 5])i = **[1, 4] + [0, 5]i**.

Como $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq W \Rightarrow X \cap Y \subseteq Z \cap W$, i.e., [2, 3] + [1, 3]i $\subseteq$ [1, 4] + [0, 5]i.

2.1.7. MATRIZES E VETORES INTERVALARES

Será apresentado nesta subseção, conceitos básicos de matrizes e vetores intervalares, segundo (Oliveira; Diverio; Claudio[2], 1997, p.73-79).

Definição 2.1.7.1: (*Matriz intervalar*)

Denota-se uma matriz intervalar por $A = (A_{ij})_{m \times n}$ com ordem m (linhas) por n (colunas), onde cada elemento (A_{ij}) é um intervalo.

Assim, $A = \begin{pmatrix} [a, b] & [c, d] \\ [e, f] & [g, h] \end{pmatrix}$ é uma matriz intervalar com duas linhas e duas colunas.

Definição 2.1.7.2: (*Vetor intervalar*)

Supondo $A = (A_{ij})$ uma matriz intervalar de ordem $m \times n$, se $m = 1$, então a matriz A é chamada ***matriz linha*** ou ***vetor linha*** e, se $n = 1$, então A é chamada ***matriz coluna*** ou ***vetor coluna***. Por exemplo:

1) $A = \begin{pmatrix} [a, b] & [c, d] & [e, f] \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×3 ou vetor linha.

2) $A = \begin{pmatrix} [a, b] \\ [c, d] \\ [e, f] \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1 ou vetor coluna.

Considera-se por convenção, um vetor intervalar como uma matriz coluna.

Definição 2.1.7.3: (*Igualdade entre matrizes intervalares*)

Sejam as matrizes intervalares: $A = (A_{ij})_{mxn}$ e $B = (B_{ij})_{rxs}$. Diz-se que A = B se, e somente se, $m = r$, $n = s$ e $A_{ij} = B_{ij}$, para todos os índices $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$.

Exemplo:

As matrizes intervalares $A = \begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [1, e] & [0, 0] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [\sqrt{1}, \sqrt{4}] & [-1, 1]^2 \\ \exp[0, 1] & [0, 0] \end{pmatrix}$ são iguais.

Definição 2.1.7.4: (*Matriz intervalar nula*)

Uma matriz intervalar $A = (A_{ij})_{mxn}$ é considerada nula se todos os seus elementos são nulos, ou seja, se $A_{ij} = [0, 0]$, $\forall i, j$.

Exemplo:

A matriz $A = \begin{pmatrix} [0, 0] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0, 0] \end{pmatrix}$ é intervalar nula de ordem 2x2.

Definição 2.1.7.5: (*Matriz intervalar identidade*)

Uma matriz intervalar $I = (I_{ij})_{mxn}$ é considerada identidade, se todos os seus elementos da diagonal principal são intervalos identidades e os demais elementos são intervalos nulos, ou seja, se $I_{ij} = [1, 1]$ para $i = j$ e $I_{ij} = [0, 0]$ para $i \neq j$.

Exemplo:

A matriz $I = \begin{pmatrix} [1, 1] & [0, 0] \\ [0, 0] & [1, 1] \end{pmatrix}$ é intervalar identidade de ordem 2x2.

Apresenta-se a seguir, as principais operações com matrizes intervalares, como a soma, a diferença, o produto por intervalo, a multiplicação entre matrizes intervalares, a interseção e a união, além da relação de inclusão.

Definição 2.1.7.6: (*Soma de Matrizes intervalares*)

Sejam $A = (A_{ij})$ e $B = (B_{ij})$ duas matrizes intervalares de mesma ordem. A matriz soma das matrizes A e B, é definida como sendo a matriz $S = A + B$, com os elementos $S_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ $\forall i, j$.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} [1, 2] & [0, 2] \\ [1, 1] & [2, 2] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [-2, 2] & [-2, 4] \\ [-1, 2] & [-1, -1] \end{pmatrix}$, tem-se:

$$S = A + B = \begin{pmatrix} [1, 2]+[-2, 2] & [0, 2]+[-2, 4] \\ [1, 1]+[-1, 2] & [2, 2]+[-1, -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 4] & [-2, 6] \\ [0, 3] & [1, 1] \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.7.7: (*Subtração de Matrizes intervalares*)

Sejam A = (A_{ij}) e B = (B_{ij}) duas matrizes intervalares de mesma ordem. A diferença entre A e B, é definida por D = A – B, com os elementos $D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$, $\forall$i, j. A diferença pode ser entendida ainda, como D = A – B = A + [-1, -1]·B.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} [1, 2] & [0, 2] \\ [1, 1] & [2, 2] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [-2, 2] & [-2, 4] \\ [-1, 2] & [-1, -1] \end{pmatrix}$, tem-se:

$$D = A - B = \begin{pmatrix} [1, 2]-[-2, 2] & [0, 2]-[-2, 4] \\ [1, 1]-[-1, 2] & [2, 2]-[-1, -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 4] & [-4, 4] \\ [-1, 2] & [3, 3] \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.7.8: (*Produto de intervalo por Matriz*)

Seja A = (A_{ij}) matriz intervalar de ordem m×n e I um intervalo. O produto do intervalo I pela matriz A é a matriz intervalar P = (P_{ij}), onde cada elemento é dado por $P_{ij} = I \cdot A_{ij}$, $\forall$i, j.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} [1, 2] & [0, 2] \\ [1, 1] & [2, 2] \end{pmatrix}$ e o intervalo I = [-2, 4], achar P = I·A. Assim,

$$P = I \cdot A = [-2, 4] \cdot \begin{pmatrix} [1, 2] & [0, 2] \\ [1, 1] & [2, 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 4]\cdot[1, 2] & [-2, 4]\cdot[0, 2] \\ [-2, 4]\cdot[1, 1] & [-2, 4]\cdot[2, 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-4, 8] & [-4, 8] \\ [-2, 4] & [-4, 4] \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.7.9: (*Multiplicação entre matrizes intervalares*)

Sejam A = $(A_{ij})_{mxp}$ e B = $(B_{ij})_{pxn}$. A multiplicação de A por B é uma matriz intervalar M = $(M_{ij})_{mxn}$ = A·B, cujos elementos é dado por $M_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} \times B_{kj}$.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} [1, 10] & [0, 1] \\ [1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [-1, 2] & [3, 4] \\ [2, 2] & [-6, -4] \end{pmatrix}$, tem-se:

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} [1, 10]\cdot[-1, 2]+[0, 1]\cdot[2, 2] & [1, 10]\cdot[3, 4]+[0, 1]\cdot[-6, -4] \\ [1, 1]\cdot[-1, 2]+[-1, 1]\cdot[2, 2] & [1, 1]\cdot[3, 4]+[-1, 1]\cdot[-6, -4] \end{pmatrix}$$

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} [-10, 20]+[0, 2] & [3, 40]+[-6, 0] \\ [-1, 2]+[-2, 2] & [3, 4]+[-6, 6] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-10, 22] & [-3, 40] \\ [-3, 4] & [-3, 10] \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.7.10: (*Interseção de matrizes intervalares*)

Sejam A = (A_{ij}) e B = (B_{ij}) duas matrizes intervalares de mesma ordem. A interseção de A com B é a matriz intervalar $\Gamma = A \cap B$, onde cada $\Gamma_{ij} = A_{ij} \cap B_{ij}$, $\forall i, j$. Caso não exista interseção entre dois elementos intervalares correspondentes, ou seja, $A_{ij} \cap B_{ij} = \varnothing$ para algum i, j, então não existirá a interseção entre A e B.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} [1, 10] & [0, 1] \\ [1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [-1, 2] & [3, 4] \\ [2, 2] & [-6, -4] \end{pmatrix}$, tem-se:

$$\Gamma = A \cap B = \begin{pmatrix} [1, 10] \cap [-1, 2] & [0, 1] \cap [3, 4] \\ [1, 1] \cap [2, 2] & [-1, 1] \cap [-6, -4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] & \varphi \\ \varphi & \varphi \end{pmatrix} = \varnothing.$$

Definição 2.1.7.11: (*União de matrizes intervalares*)

Sejam A = (A_{ij}) e B = (B_{ij}) duas matrizes intervalares de mesma ordem. A união de A com B é uma matriz intervalar $U = A \cup B$, onde $(U_{ij}) = A_{ij} \cup B_{ij}$, $\forall i, j$. Caso não exista união entre dois elementos intervalares correspondentes, ou seja, $A_{ij} \cup B_{ij} = \varnothing$, então não existirá a união entre A e B.

Exemplos:

1) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} [1, 10] & [0, 6] \\ [1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [-1, 4] & [2, 4] \\ [-2, 2] & [-6, 2] \end{pmatrix}$, tem-se:

$$U = A \cup B = \begin{pmatrix} [1, 10] \cup [-1, 4] & [0, 6] \cup [2, 4] \\ [1, 1] \cup [-2, 2] & [-1, 1] \cup [-6, 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 10] & [0, 6] \\ [-2, 2] & [-6, 2] \end{pmatrix}.$$

2) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} [1, 10] & [0, 1] \\ [1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [-1, 2] & [3, 4] \\ [2, 2] & [-6, -4] \end{pmatrix}$, tem-se:

$$U = A \cup B = \begin{pmatrix} [1, 10] \cup [-1, 2] & [0, 1] \cup [3, 4] \\ [1, 1] \cup [2, 2] & [-1, 1] \cup [-6, -4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 10] & \varphi \\ \varphi & \varphi \end{pmatrix} = \varnothing.$$

Definição 2.1.7.12: (*Inclusão de matrizes intervalares*)

Sejam A = (A_{ij}) e B = (B_{ij}) duas matrizes intervalares de mesma ordem. A matriz B é uma inclusão para A, se todo elemento da matriz A está contido no seu correspondente elemento da matriz B, ou seja, $A \subseteq B \Leftrightarrow A_{ij} \subseteq B_{ij}$, $\forall i, j$.

Exemplo:

Dadas as matrizes A = $\begin{pmatrix} [1, 3] & [4, 6] \\ [1, 1] & [-6, 0] \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} [1, 4] & [2, 6] \\ [-2, 2] & [-6, 0] \end{pmatrix}$, tem-se:

$$A_{ij} \subseteq B_{ij} = \begin{pmatrix} [1, 3] \subseteq [1, 4] & [4, 6] \subseteq [2, 6] \\ [1, 1] \subseteq [-2, 2] & [-6, 0] \subseteq [-6, 0] \end{pmatrix}.$$

Logo, B é uma inclusão para a matriz A, ou seja, $A \subseteq B$.

Teorema 2.1.7.13: (*Propriedades das matrizes intervalares*)

Sejam A, B e C, matrizes intervalares de mesma ordem. Então, são válidas as seguintes propriedades:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ © ***Associatividade***

2) $A + 0 = 0 + A = A$ © ***Elemento neutro da adição: matriz nula***

3) $A + B = B + A$ © ***Comutatividade***

4) $A \cdot I = I \cdot A = A$ © ***Elemento neutro da multiplicação: matriz identidade***

5) $(A + B) \cdot C \subseteq A \cdot C + B \cdot C$ © ***Inclusão da distributividade***.

Demonstração: Considerando as matrizes $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ e $C = (C_{ij})$ três matrizes intervalares de mesma ordem, tem-se:

1) $\Rightarrow$) $A + (B + C) \Rightarrow A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij}) = A_{ij} + X_{ij}$. Como $X_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$, então

$A_{ij} + X_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij}$. Logo, $A + (B + C) = A + B + C$.

$\Leftarrow$) $(A + B) + C \Rightarrow (A_{ij} + B_{ij}) + C_{ij} = Y_{ij} + C_{ij}$. Como $Y_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, então

$Y_{ij} + C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij}$. Logo, $(A + B) + C = A + B + C$.

Portanto, $A + (B + C) = (A + B) + C$, c.q.d.

2) $\Rightarrow$) $A + 0 \Rightarrow A_{ij} + 0 = A_{ij}$. Logo, $A + 0 = A$.

$\Leftarrow$) $0 + A \Rightarrow 0 + A_{ij} = A_{ij}$. Logo, $A + 0 = A$.

Portanto, $A + 0 = 0 + A$, c.q.d.

3) $\Rightarrow$) $A + B \Rightarrow A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij}$. Logo, $A + B = B + A$

$\Leftarrow$) $B + A \Rightarrow B_{ij} + A_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Logo, $B + A = A + B$.

Portanto, $A + B = B + A$, c.q.d.

4) $\Rightarrow$) $A \cdot I \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} A_{ik} \times I_{kj} = A_{ij}$. Logo, $A \cdot I = A$

$\Leftarrow$) $I \cdot A \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} I_{ik} \times A_{kj} = A_{ij}$. Logo, $I \cdot A = A$.

Portanto, A·I = I·A = A, c.q.d.

5) $\Rightarrow$) (A + B)·C $\Rightarrow$ (A + B)· C = S · C, onde S = A + B e cada $S_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

$S \cdot C = \sum_{k=1}^{p} S_{ik} \times C_{kj} = P_{ij}$ e considerando que A, B, C e S sejam de mesma ordem e quadrada, ou seja, número de linhas igual ao número de colunas, então P terá a mesma ordem de S e C.

$\Leftarrow$) $A{\cdot}C + B{\cdot}C \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} A_{ik} \times C_{kj} + \sum_{k=1}^{p} B_{ik} \times C_{kj} = X_{ij} + Y_{ij}$.

Vale ressaltar que a propriedade associativa do produto não é válida para as matrizes intervalares, i.e., A·(B·C) ≠ (A·B)·C.

Exemplo:

Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} [1, 1] & [0, 1] \\ [1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} [-1, 2] & [3, 4] \\ [2, 2] & [-6, -4] \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} [0, 3] & [1, 4] \\ [-1, 8] & [3, 15] \end{pmatrix}$.

Calcular:

$$A{\cdot}B = \begin{pmatrix} [-1, 2] + [0, 2] & [3, 4] + [-6, 0] \\ [-1, 2] + [-2, 2] & [3, 4] + [-6, 6] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 4] & [-3, 4] \\ [-3, 4] & [-3, 10] \end{pmatrix}$$

$$B{\cdot}C = \begin{pmatrix} [-3, 6] + [-4, 32] & [-4, 8] + [9, 60] \\ [0, 6] + [-48, 6] & [2, 8] + [-90, -12] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-7, 38] & [5, 68] \\ [-48, 12] & [-88, -4] \end{pmatrix}$$

$$(A{\cdot}B){\cdot}C = \begin{pmatrix} [-3, 12] + [-24, 32] & [-4, 16] + [-45, 60] \\ [-9, 12] + [-24, 80] & [-12, 16] + [-45, 150] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-27, 44] & [-49, 76] \\ [-33, 92] & [-57, 166] \end{pmatrix}$$

$$A{\cdot}(B{\cdot}C) = \begin{pmatrix} [-7, 38] + [-48, 12] & [5, 68] + [-88, -4] \\ [-7, 38] + [-48, 48] & [5, 68] + [-88, 88] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-55, 50] & [-83, 76]64 \\ [-55, 86] & [-83, 156] \end{pmatrix}.$$

Logo, A·(B·C) ≠ (A·B)·C.

As próximas definições, referem-se a algumas transferências de dados entre matrizes reais e intervalares. As matrizes reais são transformadas naturalmente em matrizes intervalares pontuais, bastando para isto, considerar cada elemento da matriz real como sendo um intervalo pontual da matriz intervalar correspondente. Por outro lado, a transferência de dados de matrizes intervalares para matrizes reais pode ser realizada de diferentes formas, como pode ser visto a seguir.

Definição 2.1.7.14: (*Matriz diâmetro*)

Seja A = (A_{ij}) uma matriz intervalar. A ***matriz diâmetro*** de A é a matriz real onde cada elemento corresponde ao diâmetro do respectivo intervalo da matriz intervalar, ou seja, diam(A) = (diam(A_{ij})).

Exemplo: $\text{diam}\begin{pmatrix} [1, 1] & [1, 4] \\ [2, 6] & [-2, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$

Definição 2.1.7.15: (*Matriz ponto médio*)

Seja A = (A_{ij}) uma matriz intervalar. A ***matriz ponto médio*** de A é a matriz real onde cada elemento corresponde ao ponto médio do respectivo intervalo da matriz intervalar, ou seja, med(A) = (med(A_{ij})).

Exemplo: $\text{med}\begin{pmatrix} [1, 3] & [0, 4] \\ [2, 6] & [-1, 3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

Definição 2.1.9.16: (*Matriz módulo*)

Seja A = (A_{ij}) uma matriz intervalar. A ***matriz módulo*** de A é a matriz real onde cada elemento corresponde ao módulo do respectivo intervalo da matriz intervalar, ou seja, $|A| = (|A_{ij}|)$.

Exemplo: $\left|\begin{pmatrix} [1, 2] & [0, 4] \\ [2, 5] & [-1, 3] \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

Definição 2.1.7.17: (*Ínfimo da matriz intervalar*)

Seja A = (A_{ij}) uma matriz intervalar. O ***ínfimo*** de A é a matriz real cujos elementos são os extremos inferiores dos intervalos correspondentes dessa matriz, ou seja, *inf*(A) = (*inf*(A_{ij})).

Exemplo:

$$inf\begin{pmatrix} [1, 3] & [0, 5] \\ [-2, 2] & [-1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.7.18: (*Supremo da matriz intervalar*)

Seja A = (A_{ij}) matriz intervalar. O ***supremo*** de A é a matriz real cujos elementos são os extremos superiores dos intervalos correspondentes da matriz intervalar A, ou seja, $sup(A) = (sup(A_{ij}))$.

Exemplo:

$$sup\begin{pmatrix} [1, 3] & [0, 5] \\ [-2, 2] & [-1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.7.19: (*Distância entre matrizes intervalares*)

Sejam A e B duas matrizes intervalares de mesma ordem. A ***distância*** (Đ) entre A e B é a matriz real cujos elementos correspondem a distância entre os respectivos intervalos das matrizes A e B, ou seja, Đ(A, B) = (d(A_{ij}, B_{ij})), $\forall$i, j.

Exemplo:

Sejam $A = \begin{pmatrix} [1, 1] & [0, 1] \\ [1, 1] & [-1, 1] \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} [-1, 2] & [3, 4] \\ [2, 2] & [-6, -4] \end{pmatrix}$, então

$$Đ(A, B) = \begin{pmatrix} d([1, 1], [-1, 2]) & d([0, 1], [3, 4]) \\ d([1, 1], [2, 2]) & d([-1, 1], [-6, -4]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.1.8. RELAÇÕES DE ORDENS SOBRE INTERVALOS

Além das operações intervalares mostradas até agora, destaca-se ainda, outras definições em relação ao conjunto dos intervalos, a saber, as relações de ordens.

Definição 2.1.8.1: (*Relação de pré-ordem*) (Moore[19], 79, p.10)

Sejam X = [a, b] e Y = [c, d] dois intervalos de reais. $X < Y$ se e somente se $b < c$.

Definição 2.1.8.2: (*Relação de ordem de inclusão*) (Moore[19], 79, p.10)

Sejam X = [a, b] e Y = [c, d] dois intervalos de reais. $X \subseteq Y$ se, e somente se, $c \leq a \leq b \leq d$.

Definição 2.1.8.3: (*Relação de ordem*) (Kulisch & Miranker[30], 86)

Sejam X = [a, b] e Y = [c, d] dois intervalos de reais. $X \leq Y$ se, e somente se, $a \leq c$ e $b \leq d$.

Definição 2.1.8.4: (*Ordem de Informação*) (Acióly[6], 91, p. 43)

Sejam X = [a, b] e Y = [c, d] dois intervalos. $X \sqsubseteq Y$ se, e somente se, $a \leq c \leq d \leq b$, i.e., [a, b] informa sobre [c, d].

Definição 2.1.8.5: (*Ordem de Aproximação*) (Acióly[6], 91, p. 43)

Sejam X = [a, b] e Y = [c, d] dois intervalos. $X \ll Y$ se, e somente se, $a < c \leq d < b$, i.e., [a, b] aproxima [c, d].

Essas duas últimas relações de ordens sobre os intervalos foram introduzidas por Acióly[6] em 1991 para formalizar a noção de *"um intervalo enquanto informação ou aproximação de um outro intervalo ou de um número real*".

Esse capítulo apresentou um estudo básico sobre matemática intervalar, tendo como propósito, contribuir com a discussão e divulgação de tal matemática, além de alicerçar o objetivo desta dissertação que é desenvolver uma teoria algébrica para equações intervalares locais, através de uma lógica equacional local.

No próximo capítulo, serão apresentados os conceitos básicos de domínios contínuos, destacando-se entre outros: cpo's consistentes, ordem auxiliar, completação por Corte de Dedekind, que servirão de base para se trabalhar a idéia de aproximação/informação entre intervalos. Ainda será tratado no próximo capítulo, noções de topologia, a questão da igualdade local e equações intervalares locais.

CAPÍTULO 3

3.1. DOMÍNIOS CONTÍNUOS

Como foi descrito nos capítulos anteriores, a análise intervalar é uma teoria matemática que tem como objetivo principal resolver, com eficiência, os problemas que surgem na prática da computação científica e tecnológica envolvendo aproximações. O que se espera das técnicas intervalares é uma resposta eficiente com um controle de erros automático, pois dentro de uma solução intervalar, o diâmetro desse intervalo é o indicativo do erro máximo nessa solução. Mas, para obter-se uma solução intervalar, precisa-se fazer a implementação de um projeto, usando técnicas intervalares, ou seja usando a aritmética intervalar, pois "*os algoritmos devem ser intervalares, isto é, eles devem ser uma versão intervalar de um algoritmo pontual*" (Bedregal[9], 1996, p.3).

Do ponto de vista computacional, um intervalo não é somente um conjunto numérico, mas sim, um conjunto que pode conter as informações que um sistema computacional necessita para resolver um problema numérico.

A teoria da semântica denotacional de linguagens de programação, desenvolvida por Danna Scott e Chistophen Strachey nos anos 60, baseia-se na noção de informação, onde segundo (Santiago[8], 1999, p. 20), "*ela modela os comandos de uma linguagem imperativa como uma função de um conjunto de estados que caracterizam entradas num conjunto de estados que caracterizam saídas*". Assim, dadas duas funções parciais f e g, onde $dom(f) \subseteq dom(g)$ e $f \subseteq g$, diz-se que g dá "*mais*" ou a "*mesma*" *quantidade de informação que* f *sobre a computação pretendida*. Isso fica melhor caracterizado usando-se uma ordem de informação "$\sqsubseteq$", ou seja, dadas as funções f e g, se "$f \sqsubseteq g$", significa que "f informa sobre g".

Baseado nos trabalhos de Danna Scott e Chistophen Strachey, B. M. Acióly (Acióly[6], 1991) define uma estrutura de domínios contínuos sobre o espaço dos intervalos a fim de obter uma característica informacional dos intervalos, bem como um aspecto construtivo e computacional da análise numérica, unificando assim, a *teoria de semânticas de linguagens de programação* e a *matemática computacional* (análise numérica), e uma lógica (de Scott) para raciocinar sobre *programas numéricos.*

Uma das características do trabalho de Acióly reside no fato de intervalos de extremos reais serem obtidos a partir de intervalos de extremos racionais através de um processo chamado "***completação por corte de Dedekind***", sugerindo assim, os intervalos de extremos racionais como um sistema de aproximações finitas (informações) sobre os intervalos reais, o que segundo Scott, citado por (Bedregal[9], 1996, p. 7) significa que:

> "*O nível correto para modelar matematicamente computação não é nem o estritamente finito nem o ilimitadamente infinito, mas o finitário, isto é, aqueles objetos que aparecem como limite de objetos finitos*".

O caminho natural para se fazer uma interpretação de limite é através da topologia. Nesse aspecto, duas topologias tem sido bastante observadas: a topologia de Scott e a topologia de Lawson. A topologia de Scott é consistente com ordens, enquanto que a topologia de Lawson não é consistente com ordens, mas mesmo assim, tem sido considerada no estudo de domínios potência quando se faz necessário a noção de limite. Seguindo o pensamento de Kamimura e Tang: "*programamos com elementos totais mas raciocinamos com elementos parciais*", fica em evidência a importância de uma base, pois num ambiente computacional de domínios contínuos os elementos computáveis são normalmente dados operacionalmente como supremos dirigidos de seqüências recursivamente enumeráveis de elementos básicos (Bedregal[9], 1996, p. 07).

Apresenta-se a seguir, um estudo da teoria de ordens parciais, completação por cortes de Dedekind e topologia. Esse capítulo baseia-se em (Acióly[6], 1991), (Santiago[7], 1995), (Bedregal[9], 1996), (Acióly & Bedregal[10], 1996), (Bedregal & Acióly[11], 1996), (Bedregal & Acióly[12], 1996), (Bedregal & Acióly[13], 1997), (Acióly & Bedregal[14], 1997), (Acióly & Bedregal[15], 1997), (Santiago[8], 1999), (Allison[20], 1986), (Lima[22], 1975), (Lima[23], 1989), (Lipschutz[21], 1971), (Davey & Priestley[24], 1992), (Scott[26], 1977) e (Hennessy[31], 1988).

3.1.1. ORDENS PARCIAIS

As ordens parciais são relevantes para essa proposta por serem a base da teoria dos domínios contínuos e da valoração de lógicas implicativas (Rasiowa[36]), assuntos que permeiam o desenvolvimento da dissertação aqui proposta.

Definição 3.1.1.1: Seja P um conjunto. Uma ordem parcial sobre P é uma relação binária $\leq$, tal que, $\forall x, y, z \in P$, são válidas as seguintes propriedades:

1) $x \leq x$; • *Reflexividade*
2) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$; • *Antissimetria*
3) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$; • *Transitividade*

Uma relação binária que satisfaz apenas as propriedades de *reflexividade* e *transitividade* é chamada de ***pré-ordem***. Um conjunto P munido de uma relação de ordem "$\leq$" e satisfazendo as três propriedades acima, é dito um ***conjunto parcialmente ordenado (poset),*** cuja representação genérica é $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$.

Note que toda relação de ordem sobre P, dá origem a outra relação "<", chamada ***desigualdade estrita***. Assim, $x < y$ em P, se, e somente se $x \leq y$ e $x \neq y$.

Exemplos: Ordens parciais e ordens parciais estritas:

1) $\langle I(R), \sqsubseteq \rangle$ é um poset com uma ***ordem de informação***;
2) $\langle I(R), \sqsubset \rangle$ é uma pré-ordem com uma ***ordem de informação estrita***;
3) $\langle \wp(X), \subseteq \rangle$ é um poset com a ***ordem de inclusão*** "$\subseteq$";
4) $\langle \wp(X), \subset \rangle$ é uma pré-ordem com a ***ordem de inclusão estrita*** "$\subset$".

Mostra-se a seguir, como descrever certos poset's usando *diagramas de Hasse*.

Exemplos:

1) A figura 3.1.1.2, ilustra todas as ordens possíveis de três elementos (onde a 1ª ordem é a trivial, i.e., a igualdade);

2) Pode-se definir diferentes ordens no conjunto N dos números naturais. Dois diferentes posets sobre os números naturais são ilustrados na figura 3.1.1.3, onde na segunda $N \subset N_\perp$ e sobre N prevaleceu a ordem trivial.

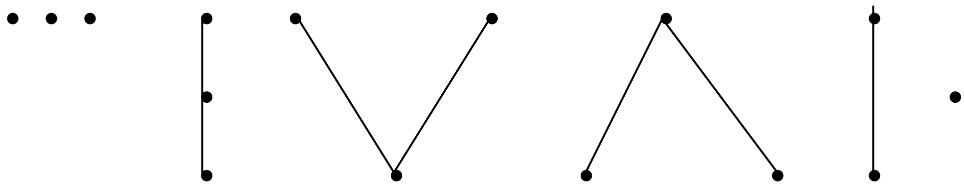

Figura 3.1.1.2: Combinações possíveis de diagramas para posets com três elementos.

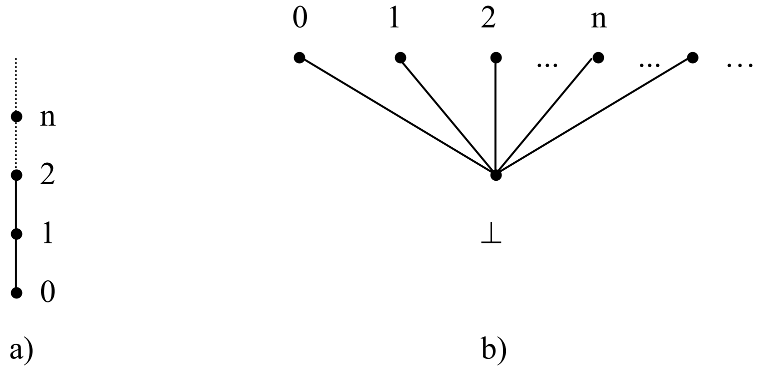

Figura 3.1.1.3: a) poset N com ordem usual e b) poset plano de N.

A ordem (a) representada acima é a ordem usual dos números naturais, enquanto que a ordem (b) é a ordem de informação sobre os naturais, onde "⊥" representa a indefinição. Mais precisamente, (a) representa os números naturais enquanto que (b) representa o tipo natural de uma linguagem de programação (Allison[20], 1986, p. 37).

Definição 3.1.1.4: (*Cadeias*)

Uma ***cadeia*** é um subconjunto ***B*** de uma ordem parcial **P**, onde $\forall x, y \in \boldsymbol{B}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemplo:

O conjunto dos números racionais (Q) com a ordem usual ≤, é uma cadeia.

Mostra-se a seguir, os elementos notáveis de uma conjunto parcialmente ordenado – poset.

3.1.1.1. Elementos Notáveis de um POSET

Definição 3.1.1.1.1: (*Majorantes e Minorantes*)

Seja $S \subseteq P$. Um elemento $x \in P$ é chamado um ***majorante de S***, se x está "acima" de qualquer elemento de S, isto é, $\forall y \in S$, $y \leq x$. Usa-se a notação **UB(S)** para representar o *"conjunto de todos os majorantes de S"*. Dualmente, um elemento $x \in P$ é chamado um ***minorante de S***, se x está "abaixo" de qualquer elemento de S, isto é, $\forall y \in S$, $x \leq y$. Usa-se a notação **LB(S)** para representar o *"conjunto de todos os minorantes de S"*.

Um subconjunto A de P é um *conjunto para cima (upward)*, se sempre que $x \in A$ e $x \leq y$, então $y \in A$. Usa-se a notação $\uparrow A$ para representar o "*conjunto de todos os elementos acima de algum elemento de* A*, isto é,* $\uparrow A = \{x \in P / \ y \leq x$ *para algum* $y \in A\}$*"*. Dualmente, um *conjunto é para baixo (downward)*, se sempre que $x \in A$ e $y \leq x$, então $y \in A$. Usa-se a notação $\downarrow A$ para representar o "*conjunto de todos os elementos abaixo de algum elemento de* A*, isto é,* $\downarrow A = \{x \in P / \ x \leq y$ *para algum* $y \in A\}$*"*. Quando A é um conjunto unitário $\{x\}$, usa-se a notação $\uparrow x$ em vez de $\uparrow\{x\}$ e $\downarrow x$ em vez de $\downarrow\{x\}$.

Definição 3.1.1.1.2: (*Maximal e Minimal*)

Um elemento $x \in P$ é maximal, se não existe nenhum outro elemento de P acima dele, isto é, se $\uparrow x \cap P = \{x\}$. Do mesmo modo, um elemento $x \in P$ é minimal, se não existe nenhum outro elemento de P abaixo dele, isto é, se $\downarrow x \cap P = \{x\}$. Caso o maximal ou minimal de P existam e sejam únicos, diz-se que eles são o elemento ***máximo*** ou ***topo*** "$\top$" e ***mínimo*** ou ***bottom*** "$\perp$", respectivamente.

Definição 3.1.1.1.3: (*Majorante Mínimo e Minorante Máximo*)

Para qualquer subconjunto $S \subseteq P$, o elemento *minimal* de UB(S), onde esse minimal é único, é chamado "***majorante mínimo de S***". Caso contrário, o conjunto dos majorantes mínimos de S é denotado por MUB(S). Dualmente, o elemento *maximal* de LB(S), onde esse maximal é único, é chamado "***minorante máximo de S***". Caso contrário, o conjunto dos minorantes maximais de S é denotado por MLB(S).

O menor elemento de um poset modela a noção de indefinição na teoria da informação de Scott.

Definição 3.1.1.1.4: (*Supremo e Ínfimo*)

O menor elemento do UB(S), caso exista, diz-se "***supremo de S",*** denotado por $\sqcup S$. Dualmente, o *maior elemento de* LB(S), caso exista, diz-se ***"ínfimo de S",*** denotado por $\sqcap S$.

Assim, dado um poset $\langle P, \leq\rangle$, com $S \subseteq P$ e os elementos $x, y \in P$:

1) $x = \sqcup S$ se as seguintes condições são satisfeitas:

   a) $x \in UB(S)$, e

   b) se $x' \in UB(S)$, então $x \leq x'$;

2) $y = \sqcap S$ se as seguintes condições são satisfeitas:

   a) $y \in LB(S)$, e

   b) se $y' \in LB(S)$, então $y' \leq y$.

Dessa maneira, pode-se observar que o supremo/ínfimo são limitantes de um conjunto parcialmente ordenado-poset.

Proposição 3.1.1.1.5: (Bedregal[9], 1996, p.11)

Seja $\langle \mathbf{P}, \leq\rangle$ um poset e A, B, $\{A_i\}_{i\in I}$, subconjuntos de P. Se o supremo e o ínfimo existem para todo A, B e $\{A_i\}_{i\in I}$, então:

1) $A \subseteq B$ implica que $\sqcup A \leq \sqcup B$ e $\sqcap B \leq \sqcap A$;
2) $\sqcup A = \sqcup(\uparrow A)$ e $\sqcap A = \sqcap(\downarrow A)$;
3) Se $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ então $\sqcup A = \sqcup_{i\in I}(\sqcup A_i)$, onde (U *(união) é o fecho dos majorantes*);
4) Se $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ então $\sqcap A = \sqcap_{i\in I}(\sqcap A_i)$, onde ($\cap$ *(interseção) é o fecho dos minorantes*).

Na teoria de Scott, exceto certos elementos especiais (ditos totais), todo elemento é informado por outro, como também, é informação de terceiros. Os supremos modelam os objetos que são informados por outros (informações). Por exemplo, considerando como ordem de informação entre os intervalos $[a, b] \sqsubseteq [c, d]$ se, e somente se $[c, d] \subseteq [a, b]$, o elemento $[\sqrt{2}, \pi]$ é informado pelo intervalo $[a, b]$, ou seja, $[a, b] \sqsubseteq [\sqrt{2}, \pi]$ se, e somente se, $[\sqrt{2}, \pi] \subseteq [a, b]$, ou ainda, $a \leq \sqrt{2}$ e $\pi \leq b$, então, pode-se considerar $[\sqrt{2}, \pi]$ como o supremo do conjunto de informação $\{[a, b] \in IR / [a, b] \sqsubseteq [\sqrt{2}, \pi]\}$.

3.1.1.2. Ordens Parciais Completas – CPO

Ver-se-á no estudo de ordens parciais completas que a noção de conjunto dirigido é uma generalização da noção de cadeia.

Definição 3.1.1.2.1: Seja $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ um poset. Um subconjunto Δ de P é ***dirigido*** se:

1) se $\Delta \neq \varnothing$;
2) se para todo a, b $\in \Delta$, existe c $\in \Delta$, tal que $a \leq c$ e $b \leq c$.

Definição 3.1.1.2.2: : Seja $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ um poset. Um subconjunto Δ de P é ***dirigido para baixo*** (*downward*) $\downarrow\Delta$, se é dirigido e sempre que $x \in \Delta$ e $y \leq x$, então $y \in \Delta$. Conjuntos *dirigido para baixo* são chamados ***ideais***. Ideais da forma $\downarrow\Delta = \{y \in \Delta \text{: } y \leq x$ *para algum* $x \in \Delta\}$ são chamados ***principais***.

Exemplo:

Cadeias são exemplos mais imediatos de conjuntos dirigidos.

Definição 3.1.1.2.3: Um poset $\mathbb{P} = \langle \mathbf{P}, \leq \rangle$, onde todo conjunto dirigido tem ***supremo***, é chamado "***Ordem Parcial Completa Dirigida***" – ***DCPO***. Se um dcpo $\mathbb{P}$ possui o menor elemento "$\perp$", é chamado "***Ordem Parcial Completa***" – ***CPO***.

A proposição abaixo mostra que uma cadeia arbitrariamente grande tem o poder de conjuntos dirigidos.

Proposição 3.1.1.2.4: (Bedregal[9], 1996, p.11)

Um poset P é um dcpo se, e somente se, cada cadeia em P tem supremo.

Definição 3.1.1.2.5: Seja $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ um poset e S um subconjunto de P. O subconjunto S é considerado "***consistente***" se ele possui um majorante em $\mathbb{P}$.

Definição 3.1.1.2.6: Seja $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ um cpo. "$\mathbb{P}$ ***é consistentemente completo"*** se cada *subconjunto consistente* $S \subseteq P$ tem supremo em $\mathbb{P}$. "$\mathbb{P}$ ***é fc-completo – finitamente consistentemente completo"*** se cada *subconjunto finito consistente*, $S \subseteq^{\text{fin}} P$, possui supremo.

Definição 3.1.1.2.7: Seja $\langle P, \leq\rangle$ um poset. Um elemento $x \in P$ é dito ***finito***, se para cada conjunto dirigido $\Delta \subseteq P$ tal que $x \leq \sqcup\Delta$, existe um $y \in \Delta$ com $x \leq y$. O conjunto dos elementos finitos de $\langle P, \leq\rangle$ será denotado por $\mathbf{P^o}$.

Exemplo:

O elemento $[\sqrt{2}, \pi]$ não é finito em IR, pois para o conjunto dirigido $\Delta = \{A \in IR / A \ll [\sqrt{2}, \pi]\}$, $\sqcup\Delta = [\sqrt{2}, \pi]$. Assim $[\sqrt{2}, \pi] \sqsubseteq \sqcup\Delta$ e não existe um $y \in \Delta$ tal que $[\sqrt{2}, \pi] \sqsubseteq y \ll [\sqrt{2}, \pi]$, o que significaria que $[\sqrt{2}, \pi] \ll [\sqrt{2}, \pi]$, o que é um absurdo, segundo (Cruz[39], 2000, p. 31).

Conforme a literatura, os elementos finitos podem ser chamados ***isolados*** ou ***compactos***. O termo "finito" não se refere à magnitude do elemento, pois existem conjuntos infinitos que são considerados como elementos finitos de algum poset e elementos finitos que são "maiores" do que alguns dos elementos não finitos (Bedregal[9], 1996, p. 32).

Proposição 3.1.1.2.8: (Bedregal[9], 1996, p. 32)

Seja $\mathbf{H} = \langle H, \leq, \perp\rangle$ um cpo. Se $S \subseteq^{fin} \mathbf{H^o}$ e $\sqcup S$ existe, então $\sqcup S$ é um elemento finito.

Demonstração: Seja $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ e Δ um conjunto dirigido em $\mathbf{H}$ tal que $\sqcup S \leq \sqcup\Delta$. É óbvio que $s_i \leq \sqcup\Delta$, para cada $i = 1, ..., n$. Como cada s_i é um elemento finito, então existe um $x_i \in \Delta$ tal que $s_i \leq x_i$. Por outro lado, Δ é um conjunto dirigido, então existe um majorante $x \in \Delta$ para o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Dessa maneira, x é majorante de S. Logo, $\sqcup S \leq x$. E assim, $\sqcup S$ é um elemento finito.

Proposição 3.1.1.2.9: (Bedregal[9], 1996, p. 33)

Seja $\mathbf{H} = \langle H, \leq, \perp\rangle$ um cpo consistentemente completo. Se $x \in H$, então $\downarrow_B x = \{y \in \mathbf{H^o} : y \leq x\}$ é um conjunto dirigido.

Demonstração: Trivialmente, $\perp$ é um elemento finito. Assim, $\downarrow_B x$ é um conjunto não vazio. Por construção x é um majorante de $\downarrow_B x$ e consequentemente, $\downarrow_B x$ é consistente. Como $\mathbf{H}$ é consistentemente completo, cada subconjunto finito S de $\downarrow_B x$ tem supremo, o qual pela proposição 3.1.1.2.8, é finito. Dessa maneira, por $\sqcup S \leq x$, $\sqcup S \leq \downarrow_B x$. Portanto, $\downarrow_B x$ é um conjunto dirigido.

Definição 3.1.1.2.10: (*CPO Algébrico*)

Seja **H** = $\langle H, \leq, \perp\rangle$ um cpo. **H** é dito ***algébrico*** se $\forall x \in H$, $\downarrow_B x$ é um conjunto dirigido e $x = \sqcup\downarrow_B x$.

Em cpo's algébricos, qualquer computação é determinada por todas as suas observações finitas. As ordens parciais usadas em computação têm um conjunto contável de elementos finitos que são finitamente observáveis no sentido de que, se eles são computáveis, então eles podem ser verificados num tempo finito e com uma quantidade finita de recursos. *Um domínio para ser computacionalmente confiável deve ser no mínimo um cpo consistentemente completo*. Para isso, um *conjunto consistente de elementos* deve ter o ***supremo*** como uma condição de interpretação única. Os *domínios de Scott* satisfazem essas condições.

Definição 3.1.1.2.11: (*Domínio de Scott*)

Um **domínio de Scott** é um *cpo algébrico consistentemente completo* com um conjunto contável de elementos finitos.

Essa noção de cpo consistentemente completo será de fundamental importância para definir intervalos consistentes, condição necessária para se definir a igualdade local sobre intervalos e a noção de equações intervalares locais, que serão a base para a construção de uma lógica equacional que manipule equações locais num sentido geral.

3.1.2. TRANSFORMAÇÕES

Definição 3.1.2.1: (*Funções Monotônicas*)

Sejam P e Q poset's. Uma função $f : P \rightarrow Q$ diz-se ***monotônica*** se para todo $x, y \in P$, com $x \leq y$, tem-se $f(x) \leq f(y)$ em Q.

Proposição 3.1.2.2: (Bedregal[9], 1996, p. 11)

Sejam P e Q poset's. Se Δ é um conjunto dirigido em P e $f : P \rightarrow Q$ é uma função ***monotônica***, então $f(\Delta)$ é um conjunto dirigido em Q.

Definição 3.1.2.3: Sejam D e E dcpo's. Uma função f : D → E diz-se ***Scott contínua ou ordem-contínua,*** se para cada conjunto dirigido Δ de D tem-se $f(\sqcup\Delta) = \sqcup f(\Delta)$.

Pode-se observar que as funções monotônicas "*preservam a ordem*", enquanto que as funções contínuas "*preservam a convergência*" de informações.

Proposição 3.1.2.4: (Santiago[8], 1999, p. 29)

Sejam $A = \langle A, \leq\rangle$ e $B = \langle B, \leq'\rangle$ dois dcpo's. Se f : A → B é uma ***ordem-contínua***, então f é ***monotônica***.

Demonstração:

Se $x \leq y$, então $y = \sqcup\{x, y\}$, e como f é uma ***ordem-contínua***, $f(\sqcup\{x, y\}) = \sqcup' f(\{x, y\})$. Assim, $f(y) = f(\sqcup\{x, y\}) = \sqcup'\{f(x), f(y)\}$. Logo, $f(x) \leq f(y)$.

Definição 3.1.2.5: (*Menor Ponto-Fixo*) (Hennessy[31], 1988, p. 127)

Seja $f \in [A \longrightarrow A']$[1]. O elemento $a \in A$ é chamado ***ponto-fixo*** *de* f se $a = f(a)$, e o mesmo é chamado ***menor ponto-fixo*** *de* f se, em adição, $a \leq_A a'$ para todo ponto-fixo a' de f.

Obviamente, o menor ponto-fixo, se existe, é único. A próxima proposição mostra que ele sempre existe para funções contínuas.

Proposição 3.1.2.6: (Hennessy[31], 1988, p. 127)

Todo $f \in [A \longrightarrow A]$ tem um *menor ponto-fixo.*

A associação entre uma função f e seu *menor ponto-fixo* x_f é um mapeamento próprio. Geralmente, denota-se este mapeamento por *fix*. Assim *fix* é uma função de $[A \longrightarrow A]$ para A, definido por $fix(f) = x_f$. Mostrar-se-á pela proposição seguinte que *fix* é por si só uma função contínua, i.e., $fix \in [[A \longrightarrow A] \longrightarrow A]$.

Proposição 3.1.2.7: (Hennessy[31], 1988, p. 128)

fix é uma função contínua de $[A \longrightarrow A]$ para A.

Demonstração: Usa-se a definição 3.1.2.3.

[1] Isto denota o conjunto de funções contínuas do cpo ***A*** para o cpo ***A'***.

i) Mostrar-se-á que *fix* é monotônica. Seja $f \leq g$. Então

a) $x_f^0 \leq_A x_g^0$, dessa maneira os dois são iguais a $\bot_A$.

b) Assumindo que $x_f^n \leq_A x_g^n$.

$$\begin{aligned} \text{Então} \quad x_f^{n+1} &= f(x_f^n) \\ &\leq_A f(x_g^n) \quad \text{pela hipótese da indução e monotonicidade de f} \\ &\leq_A g(x_g^n) \quad \text{dessa maneira } f \leq g \\ &= x_g^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_f^n \leq x_g^n$ para todo $n \geq 0$. Segue que $x_f^n \leq x_g$ para todo $n \geq 0$ já que $x_g^n \leq x_g$. Assim, x_g é um limite superior do conjunto $\{x_f^n, x \geq 0\}$ da qual se obtém $x_f \leq_A x_g$, i.e., *fix* (f) $\leq_A$ *fix* (g).

ii) Seja F uma família de funções dirigidas em $[A \longrightarrow A]$ e seja f denotar $\sqcup F$. Como $f(x) = \sqcup\{g(x), g \in F\}$, necessita-se mostrar que *fix*(f) $\leq_A \sqcup$ *fix* (F), i.e., $x_f \leq_A \sqcup\{x_g, g \in F\}$.

Seja $d = \sqcup\{x_g, g \in F\}$. Mostrar-se-á que $f(d) = d$, da qual, $x_f \leq_A \sqcup\{x_g, g \in F\}$ pela definição de x_f. Considerando o conjunto $\{g'(x_g), g' \in F, g \in F\}$, como *fix* é monotônica e cada elemento de F também, então *fix* é dirigido. Além disso, *fix* contém o conjunto $\{g(x_g), g \in F\}$. Portanto $\sqcup\{g(x_g), g \in F\} = \sqcup\{g'(x_g), g' \in F, g \in F\}$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} d &= \sqcup\{x_g, g \in F\} && \text{por definição} \\ &= \sqcup\{g(x_g), g \in F\} && \text{pela definição de } x_g \\ &= \sqcup\{g'(x_g), g' \in F, g \in F\} && \text{por hipótese} \\ &= \sqcup\{\sqcup\{g'(x_g), g' \in F\}, g \in F\} && \\ &= \sqcup\{f(x_g), g \in F\} && \text{pela definição de f} \\ &= f(d) && \text{desde que f seja contínua.} \end{aligned}$$

A identificação de isomorfismo entre duas estruturas matemáticas é bastante importante. Tratando-se de "*ordens parciais completas*", diz-se que "*dois cpo´s são isomorfos quando os mesmos possuem **a mesma quantidade de elementos** e as **mesmas ordens***" (Bedregal[9], 1996, p. 12).

Definição 3.1.2.8: (*Isomorfismo de CPO's*)

Os cpo´s D e E são ***ordens-isomorfas***, se existe uma ***função bijetiva contínua*** $f: D \rightarrow E$ tal que $f^{-1}: E \rightarrow D$ também é ***ordem-contínua***. Assim, a função f é denominada ***isomorfismo***.

Dessa maneira, pode-se observar que isomorfismo é caracterizado pelas renomeações de elementos do cpo. Assim, duas ordens isomórficas têm as mesmas propriedades. Veja a proposição abaixo.

Proposição 3.1.2.9: (Bedregal[9], 1996, p. 12)

Sejam D e E cpo´s. Se $f:D \rightarrow E$ é um isomorfismo, então para cada $X \subseteq D$, $MUB(f(X)) = f(MUB(X))$.

Demonstração:

1. Se $a \in MUB(f(X))$, então, por monotonicidade, $f^{-1}(a)$ é um majorante de $f^{-1}(f(X)) = X$. Portanto, se u é um majorante de X tal que $u \leq_D f^{-1}(a)$, então, por monotonicidade, f(u) é um majorante de f(X) e $f(u) \leq_E f(f^{-1}(a)) = a$. Logo, pela minimalidade de a, f(u) = a. Portanto, $f^{-1}(a) \in MUB(X)$ e consequentemente, $f(f^{-1}(a)) = a \in f(MUB(X))$.
2. Se $a \in f(MUB(X))$, então, $f^{-1}(a) \in MUB(X)$. Portanto, por monotonicidade, a é um majorante de f(X). Por outro lado, se u é um majorante de f(X) tal que $u \leq_E a$, então, por monotonicidade, $f^{-1}(u)$ é um majorante de X e $f^{-1}(u) \leq_D f^{-1}(a)$. Mas, pela minimalidade de $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(a) = f^{-1}(u)$. Logo, por bijetividade, u = a e portanto $a \in MUB(f(X))$.

3.1.3. ORDEM AUXILIAR

A noção de ordem auxiliar é necessária para a formalização da noção de aproximação em termos de ordens.

Definição 3.1.3.1: (*Ordem Forte ou Auxiliar*)

Dada uma ordem parcial $\langle P, \leq \rangle$, uma relação binária transitiva, $\prec$, sobre P, é uma ***ordem forte ou auxiliar de*** $\leq$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1) se $a \prec b$, então $a \leq b$;
2) se $a \prec b$ e $b \prec d$, então $\exists c \in P$ tal que $a \prec c$, $b \prec c$ e $c \prec d$;
3) se $a \leq b$, $b \prec c$ e $c \leq d$, então $a \prec d$;
4) se $a \prec b$, então $\exists c$ tal que $a \prec c \prec b$.

Proposição 3.1.3.2: Toda ordem parcial $\leq$, é auxiliar de si própria.

Demonstração: Pela definição 3.1.3.1, tem-se:

1) se $a \leq b$, então $a \leq b$;
2) se $a \leq d$ e $b \leq d$, então fazendo $c = d$, tem-se $a \leq c$, $b \leq c$ e $c \leq d$;
3) se $a \leq b$, $b \leq c$ e $c \leq d$, então $a \leq d$;
4) se $a \leq d$, então $\exists c$ tal que $a \leq c \leq b$.

Definição 3.1.3.3: (*FC – Completa*)

Dado a *ordem parcial finitamente consistentemente completa* $\langle I(Q), \sqsubseteq \rangle$, pode-se definir a seguinte relação binária:

$$[a, b] \ll [c, d] \text{ se, e somente se, } a < c \leq d < b.$$

Em outras palavras, diz-se que se o intervalo $[a, b]$ aproxima o intervalo $[c, d]$ quando $a < c \leq d < b$. Dessa maneira, essa definição formaliza a noção de aproximação entre intervalos.

Definição 3.1.3.4: (*Relação Essencialmente abaixo*) (Gierz[38], 1980, p. 38)

Seja $\langle A, \leq \rangle$ dcpo, diz-se que *a está essencialmente abaixo* (way-below) *de b*, denotado por "$a \ll b$", se para todo conjunto dirigido $\Delta \subseteq A$ tal que $b \leq \sqcup\Delta$, existe $x \in \Delta$ tal que $a \leq x$.

Proposição 3.1.3.5: Seja $\langle A, \leq \rangle$ um dcpo. O way-below "$\ll$" é uma ordem auxiliar de $\leq$.

Demonstração: Pela definição 3.1.3.1, tem-se:

1) se $a \ll b$, então $a \leq b$;
2) se $a \ll d$ e $b \ll d$, então fazendo $c = d$, temos $a \ll c$, $b \ll c$ e $c \leq d$;
3) se $a \leq b$, $b \ll c$ e $c \leq d$, então $a \ll d$;
4) se $a \ll d$, então $\exists c$ tal que $a \ll c \ll d$.

Proposição 3.1.3.6: Dada uma ordem parcial $\mathbb{P} = \langle \wp, \leq, \prec \rangle$ contendo uma ordem auxiliar $\prec$, o conjunto $\downarrow a = \{y \in \wp : y \prec a\}$ é ***dirigido***.

Demonstração:

Se $x, y \in \downarrow a$, então, por definição, $x \prec a$ e $y \prec a$ e por 2) e 1) da definição 3.1.1.2.1, $\exists z \in \downarrow a$ tal que $x \leq z$, $y \leq z$ e $z \prec a$, ou seja, $\exists z \in \downarrow a$ tal que $x \leq z$, $y \leq z$.

Definição 3.1.3.7: (*Anti-Reflexiva*)

Uma relação binária "<" sobre P é dita anti-reflexiva se $\forall x \in P$, $x \not< x$.

Definição 3.1.3.8: (*Quasi-Ordem:* $\langle \wp, < \rangle$)

Uma quasi-ordem $\langle \wp, < \rangle$ é um conjunto P contendo uma relação < transitiva e anti-reflexiva.

Lema 3.1.3.9: (Santiago[8], 1999, p. 27)

Cada ordem parcial $\langle \wp, \leq \rangle$, dá origem a uma quasi-ordem, e se "<" é uma quasi-ordem, então a relação definida por: $x \leq y$ se, e somente se, $x < y$ ou $x = y$, é uma ordem parcial.

Proposição 3.1.3.10: Para toda quasi-ordem $\langle \wp, < \rangle$, se $p < q$, então $q \not< p$.

Demonstração: Se $p < q$, supondo que $q < p$ então $p < p$ (por transitividade), o que representa uma contradição dessa relação, pois < é anti-reflexiva. Logo, se $p < q$, então $q \not< p$.

Exemplos:

1) No domínio de Scott $\langle \wp(N), \subseteq, \varnothing \rangle$, a relação $x \prec y$ se, e somente se, $x \subseteq y$ e $x \neq y$ é uma ordem forte diferente de $\subseteq$;
2) No cpo $\mathbf{N}_\perp$, $\ll$ e $\leq$ são coincidentes;
3) No poset fc-completo $\langle I(Q), \sqsubseteq, [-\infty, +\infty] \rangle$, a relação $[a, b] \prec [c, d] \Leftrightarrow a < c$ e $d < b$ ou $[a, b] = [-\infty, +\infty]$ é uma ***ordem forte.***

Definição 3.1.3.11: (*DCPO Contínuo*)

Um dcpo junto com sua *ordem essencialmente abaixo* "$\ll$", $D = \langle A, \leq, \ll \rangle$, é um ***dcpo contínuo***, se $\forall \boldsymbol{a} \in A$, $\boldsymbol{a} = \sqcup \mathord{\downarrow}\boldsymbol{a}$.

Definição 3.1.3.12: (*Base*)

Uma ordem parcial junto com sua *ordem essencialmente abaixo* "$\ll$", $E = \langle B, \leq', \ll' \rangle$, é uma ***base de um dcpo contínuo*** $\mathbf{D} = \langle A, \leq, \ll \rangle$, se $B \subseteq A$, $\leq' \subseteq \leq$ e $\ll' \subseteq \ll$, e $\forall \mathbf{a} \in A$, $\mathbf{a} = \sqcup \mathord{\downarrow}\mathbf{a}$, onde $\mathord{\downarrow}\mathbf{a} = \{y \in B: y \ll \boldsymbol{a}\}$, ou seja, $\mathord{\downarrow}\boldsymbol{a}$ é o conjunto de todos os elementos de B, essencialmente abaixo de $\boldsymbol{a}$, i.e., $\boldsymbol{a}$ é o supremo de $\mathord{\downarrow}\boldsymbol{a}$ e B é uma base de A).

Colorário 3.1.3.12:
Para todo $\boldsymbol{a} \in A$, $\downarrow\!\!\boldsymbol{a}$ é um conjunto dirigido.

Demonstração: Dado $\boldsymbol{a} \in A$ e $x, y \in \downarrow\!\!\boldsymbol{a}$, por definição $x \ll \boldsymbol{a}$ e $y \ll \boldsymbol{a}$. Então existe $z \in A$ tal que $x \ll z$, $y \ll z$ e $z \ll \boldsymbol{a}$, conforme 2) da definição 3.1.3.1 de ordem forte. Portanto, $\exists z \in \downarrow\!\!\boldsymbol{a}$ tal que $x \ll z$, $y \ll z$.

Definição 3.1.3.13: (*Domínios Contínuos*)
Um ***domínio contínuo*** é um *dcpo contínuo consistentemente completo* com *base enumerável*.

Definição 3.1.3.14: (*Domínios de Scott*)
Um ***domínio de Scott*** é um *domínio contínuo* com uma *base contável de elementos compactos*.

A *menor* dessas ordens é "$\prec$", como na definição 3.1.3.1 e a *maior* ordem é "$\leq$". A ordem way-below também é uma ordem forte.

3.1.4. COMPLETAÇÃO POR CORTES DE DEDEKIND

Em 1991, Aciòly[6] generalizou a noção Cortes de Dedekind para construir intervalos de extremos reais a partir de intervalos de extremos racionais, semelhantemente ao que é feito com a versão original de cortes na construção do sistema de números reais (Rudin[25],1953).

Definição 3.1.4.1: (*Cortes de Dedekind*)
Seja $\mathbb{P} = \langle P, \leq, \prec, \perp \rangle$ uma ordem parcial, com ordem forte "$\prec$" e menor elemento "$\perp$". Um subconjunto $D \subseteq P$ tal que $D \neq P$ e $D \neq \emptyset$, diz-se um ***corte de Dedekind*** se, e somente se:

1. D é um conjunto dirigido;
2. Se $x \prec y$ e $y \in D$, então $x \in D$;
3. Para todo $x \in D$, existe $y \in D$ tal que $x \prec y$.

Nota-se que a propriedade 3., define os cortes de Dedekind como um tipo de seqüência convergente.

Proposição 3.1.4.2: (Bedregal[9], 1996, p. 44) Seja $\langle P, \leq, \prec, \perp \rangle$ uma ordem parcial com *menor elemento e ordem forte* $\prec$. Para todo $x \in P$ o conjunto $↡x = \{y \in P \colon y \prec x\}$ é um ***corte de Dedekind*** e $\sqcup ↡x = x$.

Demonstração: Deve-se mostrar que $↡x$ satisfaz a definição 3.1.2.1.

1) se $y \prec z$ e $z \in ↡x$, então $y \in ↡x$;
2) se $y \in ↡x$; então $y \prec x$. Pela definição de ordem forte, existe z tal que $y \prec z$ e $z \prec x$. Logo, $z \in ↡x$;
3) se $y, z \in ↡x$, então $y \prec x$ e $z \prec x$. Pela definição de ordem forte, existe w tal que $y \prec w$, $z \prec w$ e $w \prec x$. Assim, $w \prec x$ caracteriza $↡x$ como um conjunto dirigido.
4) para $\sqcup ↡x = x$, se existe $x' \neq x$ tal que $x' = \sqcup ↡x$, então como x é um majorante de $↡x$, temos $x' < x$, o que significa que existe $z \in P$ tal que $x' \prec z \prec x$, e portanto, existe $z \in ↡x$ tal que $x' \prec z$, o que contradiz o fato de x' ser um supremo de $↡x$. Logo, $\sqcup ↡x = x$.

A proposição seguinte mostra o Corte de Dedekind como poset, cujos elementos (intervalos de reais) estão relacionados por uma ordem forte ou auxiliar.

Proposição 3.1.4.3: (Santiago[8], 1999, p. 34) Para todo $[a, b] \in I(R)$, o conjunto $\overset{\circ}{↡}[a, b]^2 = \{X \in I(Q) \colon X \ll [a, b]\}$ é um corte de Dedekind e $\sqcup \overset{\circ}{↡}[a, b] = [a, b]$.

Demonstração: Dados $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3] \in IR$, então:

1. $\overset{\circ}{↡}[a_1, b_1] \neq \emptyset$, como $[a_1, b_1] \in IR$, existe $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $y_1 < a_1 \leq b_1 < y_2$, logo $[y_1, y_2] \in \overset{\circ}{↡}[a_1, b_1]$;
2. Como $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, é suficiente tomar $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $a_1 \leq b_1 < a_2 < b_2$ para concluir que $[a_2, b_2] \in I(\mathbb{Q})$, mas $[a_2, b_2] \notin \overset{\circ}{↡}[a_1, b_1]$. Logo, $[a_2, b_2] \neq \overset{\circ}{↡}[a_1, b_1]$;
3. Se $[a_2, b_2] \ll [a_3, b_3]$ e $[a_3, b_3] \in ↧[a_1, b_1]$, então $[a_2, b_2] \ll [a_3, b_3] \ll [a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2] \in \overset{\circ}{↡}[a_1, b_1]$;

2 O símbolo "$\overset{\circ}{↡}$" denota um conjunto essencialmente abaixo e uma base.

4. Para $[a_2, b_2] \in \twoheaddownarrow[a_1, b_1]$, pode-se encontrar $a_3, b_3 \in \mathbb{Q}$ tal que $a_2 < a_3 < a_1 \leq b_1 < b_3 < b_2$ e por conseguinte, $[a_3, b_3] \in I(\mathbb{Q})$, tal que $[a_2, b_2] \ll [a_3, b_3] \ll [a_1, b_1]$. Assim, para todo $[a_2, b_2] \in \twoheaddownarrow[a_1, b_1]$ existe o intervalo $[a_3, b_3] \in \twoheaddownarrow[a_1, b_1]$ tal que $[a_2, b_2] \ll [a_3, b_3]$;
5. Dados $[a_2, b_2], [a_3, b_3] \in \twoheaddownarrow[a_1, b_1]$, então, por definição, $a_2 < a_1 \leq b_1 < b_2$ e $a_3 < a_1 \leq b_1 < b_3$; tomando $g = \max(a_2, a_3)$ e $h = \min(b_2, b_3)$, obtém-se a seguinte assertiva: $a_2 \leq \max(a_2, a_3) < a_1 \leq b_1 < \min(b_2, b_3) \leq b_2$ e $a_3 \leq \max(a_2, a_3) < a_1 \leq b_1 < \min(b_2, b_3) \leq b_3$. Por definição existe $[\max(a_2, a_3), \min(b_2, b_3)] \in \twoheaddownarrow[a_1, b_1]$ tal que $[a_2, b_2] \sqsubseteq [\max(a_2, a_3), \min(b_2, b_3)]$ e $[a_3, b_3] \sqsubseteq [\max(a_2, a_3), \min(b_2, b_3)]$. Portanto, $\twoheaddownarrow[a_1, b_1]$ é um conjunto dirigido.

Proposição 3.1.4.4: (Santiago[8], 1999, p. 35)

Para todo $X, Y \in P$, se $X \sqsubseteq Y$, então $\twoheaddownarrow X \subseteq \twoheaddownarrow Y$.

Demonstração: Dados $X, Y \in P$ e supondo que $X \sqsubseteq Y$, se $Z \in \twoheaddownarrow X$, então, por definição, $Z \in P$, $Z \ll X$ e $X \sqsubseteq Y$. Pela propriedade 3) da ordem auxiliar, $Z \ll Y$ e por definição, $Z \in \twoheaddownarrow Y$. Logo, para todo $X, Y \in P$, se $X \sqsubseteq Y$, então $\twoheaddownarrow X \subseteq \twoheaddownarrow Y$.

Proposição 3.1.4.5: (Santiago[8], 1999, p. 35)

Para todo $X, Y \in P$, se $X \ll Y$, então $\twoheaddownarrow X \subset \twoheaddownarrow Y$.

Demonstração: Dados $X, Y \in P$ e supondo que $X \ll Y$, pela propriedade 1) da ordem auxiliar e pela proposição 3.1.4.4, $\twoheaddownarrow X \subseteq \twoheaddownarrow Y$. Pela propriedade 4) da ordem auxiliar, existe $W \in P$ tal que $X \ll W \ll Y$. Como $\ll$ é uma ordem essencialmente abaixo, se $X \ll W$, pela proposição 3.1.3.9, $W \not\ll X$, e portanto $W \notin \twoheaddownarrow X$. Assim, para $\twoheaddownarrow X \subseteq \twoheaddownarrow Y$, existe $W \in P$ tal que $W \in \twoheaddownarrow Y$ e $W \notin \twoheaddownarrow X$. Logo, $\twoheaddownarrow X \subset \twoheaddownarrow Y$.

Proposição 3.1.4.6: (Santiago[8], 1999, p. 35)

Para todo corte de Dedekind γ e para $X \in \gamma$, $\twoheaddownarrow X \subset \gamma$.

Demonstração: Dado um corte de Dedekind $\gamma \in \overline{P}$ e $X \in \gamma$, então se $Y \in \twoheaddownarrow X$, por definição, $Y \in P$, $Y \ll X$ e por hipótese, $X \in \gamma$. Pela propriedade 3) do corte de Dedekind, $Y \in \gamma$ e portanto, $\twoheaddownarrow X \subseteq \gamma$. Observa-se que $X \in \gamma \subset P$, mas $X \notin \twoheaddownarrow X$, caso contrário,

$X \in \twoheaddownarrow X$ e por definição, $X \ll X$, o que é um absurdo, pois $\ll$ é anti-reflexiva. Assim, para $\twoheaddownarrow X \subseteq \gamma$ e $X \neq \gamma$ e por conseguinte, $\twoheaddownarrow X \subset \gamma$.

Definição 3.1.4.7: (*Completação por Cortes de Dedekind*)

Seja $\langle P, \sqsubseteq, \prec, \perp \rangle$ uma ordem parcial com menor elemento "$\perp$" e ordem forte "$\prec$". A coleção de cortes de Dedekind sobre P, $\overline{P} = \{\alpha \in \wp(\overline{P})$: α é um corte de Dedekind em P$\}$ contendo as seguintes relações:

1) $\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$ e existe um $X \in \beta$ tal que $\alpha \subset \twoheaddownarrow X \subset \beta$;
2) $\alpha \sqsubseteq \beta \Leftrightarrow \beta \subseteq \alpha$, para $\alpha, \beta \in \overline{P}$, diz-se que $\overline{P}$ é uma "***Completação por Cortes de Dedekind sobre*** P".

Proposição 3.1.4.8: A estrutura $\langle \overline{P}, \prec \rangle$ é uma ordem forte.

Demonstração: Por definição, a relação $\prec$ é anti-reflexiva e transitiva e por estas propriedades, uma estrutura com esta relação é uma ordem forte.

Proposição 3.1.4.9: A estrutura $\langle \overline{P}, \sqsubseteq \rangle$ é uma ordem parcial.

Demonstração: Basta observar que a relação de inclusão "$\subseteq$" é uma ordem parcial.

Lema 3.1.4.10: Seja $\langle P, \sqsubseteq, \prec, \perp \rangle$ um poset fc-completo e $S \subseteq \overline{P}$. Se M é o conjunto de todos os majorantes de S, então $\sqcap M \in \overline{P}$.

Demonstração:

1) $\sqcap M$ é dirigido, pois para $a, b \in \sqcap M$, se $a \leq b$ e $b \leq a$, trivialmente existe $c \in \sqcap M$ tal que $a \leq c$ e $b \geq c$. Se a e b são incomparáveis, então procedendo da mesma maneira que item 2.a), ver-se que $j = \sqcup\{a, b\} \in \sqcap M$.
2) Se $a \prec b$ e $b \in \sqcap M$, então para todo $D \in M$, $b \in D$. Como D é corte, então $a \in D$. Logo, $a \in \sqcap M$.
3) Seja $a \in \sqcap M$. Supondo que não existe $b \in \sqcap M$ tal que $a \prec b$. Então existe duas possibilidades:

a) Se existe $b \in M$ tal que a e b são incomparáveis, então para todo $D \in \sqcap M$, $a, b \in D$ são incomparáveis. Como D é um corte, então existe $h \in D$ tal que $a \prec h$ e $b \prec h$.

Como P é fc-completo, o conjunto $\{a, b\}$ possui supremo em P, vamos supor j. Assim, pela definição de ordem auxiliar, tem-se que $j \ll h$ para todo $D \in M$ e $h \in M$ tal que $a \prec b$ e $b \prec h$. Portanto, $j \in \sqcap M$ e como $a \neq h$ e $a \prec h$.

b) Para todo $b \neq a$ tal que $a \in \sqcap M$, $b \prec a$. Assim, pela definição de corte, $\sqcap M = \downarrow a$. Novamente, tem-se duas possibilidades, a primeira, que exista $D' \in S$, tal que $D' = \downarrow a$ e neste caso, por D' ser um corte, trivialmente, $\sqcap M$ é um corte de Dedekind. Por outro lado, se para todo $D' \in S$, $D' \subset \downarrow a$, então pela definição de corte de Dedekind, para todo $D' \in S$, $D' \subseteq \text{↡}a$, e portanto, $\text{↡}a$ também é um majorante de S. Como $\text{↡}a \subseteq \text{↡}a$, tem-se que $\sqcap M = \downarrow a = \text{↡}a$ e por definição, $\sqcap M$ é um corte de Dedekind. Logo, existe um $b \in \text{↡}a$ tal que $b \prec a$.

Lema 3.1.4.11: Seja $\Delta \subseteq \overline{P}$ tal que Δ é dirigido, então $\sqcup\Delta \in \overline{P}$.

Demonstração:

1) se $x \prec y$ e $y \in \sqcup\Delta$, então existe um corte $C \in \Delta$ tal que $y \in C$. Pela definição de corte, $x \in C$, e por conseqüência, $x \in \sqcup\Delta$;
2) se $x \in \sqcup\Delta$, então existe um corte $C \in \sqcup\Delta$ tal que $x \in C$. Pela definição de corte, $\exists y \in C$ e, consequentemente, $y \in \sqcup\Delta$, tal que $x \prec y$;
3) se $x, y \in \sqcup\Delta$, então existe C_1, C_2, tal que $x \in C_1$ e $x \in C_2$. Como Δ é dirigido, então existe um $C \in \Delta$ tal que $C_1 \sqsubseteq C$ e $C_2 \sqsubseteq C$. Logo, $x, y \in C$, e pelo fato de C ser dirigido, então existe $z \in C$ e portanto $z \in \sqcup C$, tal que $x \leq y$ e $y \leq z$.

Lema 3.1.4.12: Seja $\langle P, \leq, \prec, \perp \rangle$ um poset fc-completo. A ***completação por cortes de Dedekind*** de P, é um ***cpo consistentemente completo***.

Teorema 3.1.4.13: Seja $\langle P, \leq, \prec, \perp \rangle$ um poset *fc-completo* e *com ordem forte "$\prec$"*. A *completação por cortes de Dedekind de* P*,* é um domínio contínuo.

Demonstração: Do lema anterior sai que $\overline{P}$ é um cpo consistentemente completo. Assim, basta mostrar que o mesmo é contínuo. Para isso, deve-se mostrar que $B = \{\text{↡}x \;/\; x \in P\}$ é uma base. Seja $D \in \overline{P}$. O conjunto $\overline{D} = \{\text{↡}x \;/\; x \in D\}$, por ser um corte, é um conjunto dirigido, e pelo lema anterior, $\sqcup \overline{D}$ é o seu supremo. Como $D = \sqcup \overline{D}$, então D é o supremo de um conjunto dirigido de elementos de B.

Caso a ordem forte seja a própria $\sqsubseteq$, então $\overline{P}$ é a ***completação por ideais de P***. Portanto, todo ***domínio de Scott*** é um ***domínio contínuo,*** cuja ordem forte é a própria $\sqsubseteq$. Ainda, a base de um domínio contínuo, conforme as definições acima, é um poset fc-completo enumerável, que será caracterizada como *base do domínio*. Dessa maneira, um elemento de um domínio contínuo A, é considerado finito, se ele pertence a suas bases. A notação mais adequada para designar a base de um conjunto ordenado é B_A, ou seja, B é a base de A.

Para complementar a noção de domínios contínuos e domínio de Scott, será visto a seguir alguns conceitos básicos de topologia e espaços topológicos.

3.2. TOPOLOGIA

A necessidade da noção de conceitos topológicos neste trabalho, vem da noção de "ordem de informação/aproximação para intervalos" introduzida por Acióly[6] em 1991, quando o mesmo introduziu a noção de topologia de Scott no espaço dos intervalos para dar um sentido topológico às referidas ordens. Em (Santiago[8], 1999) foram usados abertos topológicos como valores verdade dos predicados de existência e igualdade local entre intervalos. Como estes conceitos também farão parte desta dissertação, faz-se necessário aqui, uma apresentação de alguns conceitos básicos de topologia.

O texto seguinte, está referenciado em (Bedregal[9], 1996), (Santiago[8], 1999), (Acióly[6], 1991), (Lima[22], 1975) e (Lipschutz[21], 1973).

Definição 3.2.1: (Lima[22], 1975, p. 71) Seja X um conjunto não vazio. Uma *família* T *de subconjuntos* de X, chamados abertos da topologia, ***diz-se uma topologia sobre X***, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1) $\varnothing$ e X pertencem a T;
2) Se $A_1, ..., A_n \in \mathrm{T}$, então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathrm{T}$;
3) Dada uma família arbitrária $(A_i)_{i\in L}$ com $(A_i) \in \mathrm{T}$ para cada $i \in L$, tem-se $\bigcup_{i\in L} A_i \in \mathrm{T}$.

Definição 3.2.2: (*Espaço Topológico*)

Seja X um conjunto não vazio e T uma topologia dos subconjuntos abertos de X, então $\langle X, \mathrm{T}\rangle$ diz-se ***um espaço topológico sobre X.***

Exemplos:

1) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathrm{T} = \{X \in \mathbb{R} : X$ é a união de intervalos abertos em $\mathbb{R}\}$. Então, $\langle \mathbb{R}, \mathrm{T}\rangle$ é um *espaço topológico*.
   Esta topologia é conhecida como "*topologia usual da reta*", "*topologia canônica sobre* $\mathbb{R}$*" ou "topologia Euclidiana".*
2) Seja X um conjunto qualquer não vazio e $\wp(X)$ uma topologia sobre X. Então $\langle X, \wp(X)\rangle$ é um espaço topológico chamado ***discreto***.

3) Seja X um conjunto não vazio. Uma classe D = {X, ∅} é uma topologia sobre X, tida como trivial, pois ela contém somente o próprio conjunto X e o ∅. Então ⟨X, {X, ∅}⟩ ou ⟨X, D⟩ é um espaço topológico chamado ***indiscreto***.

4) A interseção entre duas topologias quaisquer $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ em X é uma topologia em X. Pois, como X e ∅ pertencem tanto a $\mathcal{T}_1$ como a $\mathcal{T}_2$, então pertencem a $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Por outro lado, se A, B $\in$ ($\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$), então A, B $\in \mathcal{T}_1$ e A, B $\in \mathcal{T}_2$. Mas, como $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são topologias, $(A \cap B) \in \mathcal{T}_1$ e $(A \cap B) \in \mathcal{T}_2$ e, assim, $(A \cap B) \in (\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2)$. O raciocínio é análogo para a união qualquer.

O exemplo (4) pode ser generalizado para quaisquer família de topologias, através do seguinte teorema:

Teorema 3.2.3: (Lipschutz[21], 1973, p. 95)

Seja $\{\mathcal{T}_{i/i\in I}\}$uma coleção de topologias num conjunto X. Então, a interseção $\cap_i \mathcal{T}_i$ é também uma topologia em X.

O mesmo não é verificável para a união de famílias de topologias de um conjunto X, como se mostra no exemplo abaixo.

Exemplo:

Seja X = {a, b, c} e as topologias sobre X, $\mathcal{T}_1$ = {X, ∅, {a}} e $\mathcal{T}_2$= {X, ∅, {b}}. A união $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ = {X, ∅, {a}, {b}} não é uma topologia em X, pois, não satisfaz a definição 3.2.1. Isto é, $\{a\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, $\{b\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, mas $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$. Por outro lado, a interseção $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ = {X, ∅} é uma topologia em X, pois satisfaz a definição 3.2.1.

Se A é um aberto que contém ***a*** $\in$ X, então A é considerado uma vizinhança aberta de ***a***. Equivalentemente, caso ***a*** $\notin$ X, A é considerado uma vizinhança aberta restrita de ***a***.

Definição 3.2.4: (*Ponto de Acumulação*)

Seja X um espaço topológico. Um ponto p $\in$ X é um *ponto de acumulação*, ou *ponto limite* de um subconjunto A de X se, e somente se, todo conjunto aberto G que contém p, contém também um ponto de A diferente de p, ou seja,

$$G \text{ aberto}, p \in G \Rightarrow (G - \{p\}) \cap A \neq \varnothing.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de A, denotado por A', é o conjunto derivado de A.

Exemplo:

1) Dado o conjunto X = {a, b, c, d, e}. A classe T = {X, ∅, {a}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d, e}} é uma topologia de X. Considerando-se o subconjunto A = {a, b, c} de X e como b ∈ X ∩ {b, c, d, e}, e tanto X quanto {b, c, d, e} são abertos que possuem pontos de A diferentes de b, então b é um ponto de acumulação de A.
2) Seja A = {1, 1/2, 1/3, 1/4, ...}. O ponto zero é ponto de acumulação de A, pois qualquer conjunto aberto G com 0 ∈ G contém um intervalo aberto $(-a_1, a_2) \subset G$ com $-a_1 < 0 < a_2$ que contém pontos de A.

   Observa-se que o ponto limite 0 de A não pertence a A, e que A não possui qualquer outro ponto de acumulação; então, o conjunto derivado de A é o conjunto unitário {0}, i.e., A' = {0}.
3) Considerando-se o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, pode afirmar que todo número real p ∈ $\mathbb{R}$ é limite de $\mathbb{Q}$, pois todo conjunto aberto contém números racionais, i.e., pontos de $\mathbb{Q}$.
4) O conjunto $\mathbb{Z}$ = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} dos inteiros não tem ponto de acumulação, pois o conjunto derivado de $\mathbb{Z}$ é um conjunto vazio.

Teorema 3.2.5: (Bolzano-Weierstrass) (Lipschutz[21], 1973, p. 72)

Seja A um conjunto infinito, cotado, de reais. Então, A tem ao menos um ponto de acumulação.

Definição 3.2.6: (*Relação de Ordem entre Topologias*)

Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias em um conjunto não vazio X. Supondo que $\mathcal{T}_1$ é um subconjunto de $\mathcal{T}_2$, i.e., $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Dessa forma, diz-se que $\mathcal{T}_1$ é menor, ou mais fraca, do que $\mathcal{T}_2$ e que $\mathcal{T}_2$ é mais refinado, ou maior, que $\mathcal{T}_1$.

Observa-se que uma coleção de todas as topologias em X é parcialmente ordenada pela ordem de inclusão de classes.

Exemplo:

Considerando-se a topologia discreta $\wp$, a topologia indiscreta $\Im$ e uma topologia T mais fraca do que $\wp$ e mais refinado do que $\Im$, então $\Im \subset \mathsf{T} \subset \wp$.

Observa-se ainda, que qualquer topologia sobre um conjunto X, ordenado pela inclusão, é um reticulado completo, cujo menor elemento é $\varnothing$ e o maior elemento é X.

Geralmente, uma topologia T sobre um conjunto X, é especificada em termos de algum subconjunto conveniente de T. O conceito mais apropriado para essa noção é dado por:

Definição 3.2.7: (*Base de um Espaço Topológico*)

A base de uma topologia T, é um subconjuntos $\mathscr{B}$ de T, tal que todo conjunto aberto é uma união de elementos de $\mathscr{B}$. Um espaço topológico que contém uma base contável é chamado de "2º contável".

Definição 3.2.8: (*Espaço Topológico T_0*)

Um espaço topológico $\langle \mathbf{X}, \mathsf{T} \rangle$ diz-se T_0, se dados dois pontos distintos de **X**, existe um aberto que contém um e não o outro. Ou seja, quando um aberto contém ambos, significa que os pontos são os mesmos.

Exemplo:

O espaço topológico de Sierpinski (D, $\{\phi, \{1\}, D\}$) é T_0. O aberto $\{1\}$ contém 1 e não contém 0.

Definição 3.2.9: (*Conjunto Fechado*)

Dado um espaço topológico $\langle \mathbf{X}, \mathsf{T} \rangle$, um subconjunto de $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$, diz-se fechado se, e somente se, $\mathbf{X} - \mathbf{F} \in \mathsf{T}$, i.e., se seu complemento é aberto.

Proposição 3.2.10: (Lipschutz[21], 1973, p. 16)

Em um espaço topológico X, um subconjunto A de X é aberto se, e somente se, seu complemento é fechado.

Teorema 3.2.11: (Lipschutz[21], 1973, p. 17)

Um subconjunto A de um espaço topológico X é fechado se, e somente se, A contém cada um dos seus pontos de acumulação.

Assim, um conjunto A é fechado se, e somente se, o conjunto A' derivado de A, é subconjunto de A, i.e., $A' \subset A$.

Definição 3.2.12: (*Fecho de um conjunto*)

Seja $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto de X. O fecho de A, denotado por $\overline{\mathbf{A}}$, é a interseção de todos os conjuntos fechados de X que contém A. Em particular, se $\{F_i \,/\, i \in I\}$ é a classe de todos os subconjuntos de X que contém A, então $\overline{\mathbf{A}} = \cap_i F_i$.

Logo, $\overline{\mathbf{A}}$ é fechado por ser a interseção de fechados. E ainda mais, $\overline{\mathbf{A}}$ é o menor fechado que contém A, i.e., se F é um outro fechado que contém A, então $A \subset \overline{\mathbf{A}} \subset F$.

Proposição 3.2.13: (Lipschutz[21], 1973, p. 97)

Seja $\overline{\mathbf{A}}$ o fecho de **A**. Então,

i) $\overline{\mathbf{A}}$ é fechado;

ii) Se F é fechado e contém **A**, então $A \subset \overline{\mathbf{A}} \subset F$;

iii) A é fechado se, e somente se, $A = \overline{\mathbf{A}}$

Proposição 3.2.13: (Lipschutz[21], 1973, p. 98)

Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Então, o fecho de A é a união de A e seus pontos de acumulação, i.e, $\overline{\mathbf{A}} = A \cup \overline{\mathbf{A}}$.

Um ponto $p \in X$ é dito **ponto aderente** de $A \subset X$ se, e somente se, p pertence ao fecho de A, i.e, $p \in \overline{\mathbf{A}}$.

Um subconjunto A de um espaço topológico X diz-se **denso** em $B \subset X$ se B está contido no fecho de A, i.e, $B \subset \overline{\mathbf{A}}$. Em particular, A é denso em X se e somente se $\overline{\mathbf{A}} = X$.

Proposição 3.2.14: (Acióly[6], 1991, p. 80)

Seja $\langle \mathbf{X}, \mathcal{T} \rangle$ um espaço topológico e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Então todo conjunto aberto que contém **x** ou **y** conterá ambos se, e somente se, $\overline{\{\mathbf{x}\}} = \overline{\{\mathbf{y}\}}$, onde esses representam o fecho dos abertos $\{\mathbf{x}\}$ e $\{\mathbf{y}\}$, respectivamente.

Corolário 3.2.15: (Acióly[6], 1991, p. 81)

Um espaço topológico $\langle \mathbf{X}, \mathcal{T} \rangle$ é $\mathcal{T}_0$ se, e somente se, para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, então $x \notin \overline{\{\mathbf{y}\}}$ ou $y \notin \overline{\{\mathbf{x}\}}$.

Definição 3.2.16: (*Espaço Topológico $\mathcal{T}_1$*)

Um espaço topológico $\langle \mathbf{X}, \mathrm{T} \rangle$ diz-se $\mathcal{T}_1$ se para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existem $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'} \in \mathrm{T}$ com $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{y} \notin \mathbf{A}$ **e** $\mathbf{y} \in \mathbf{A'}$, $\mathbf{x} \notin \mathbf{A'}$.

Proposição 3.2.17: (Acióly[6], 1991, p. 81)

Um espaço topológico $\langle \mathbf{X}, \mathrm{T} \rangle$ é $\mathcal{T}_1$ se, e somente se, para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\overline{\{\mathbf{x}\}} = \{\mathbf{x}\}$.

Corolário 3.2.18: (Acióly[6], 1991, p. 82)

Um espaço topológico $\langle \mathbf{X}, \mathrm{T} \rangle$ é $\mathcal{T}_1$ se, e somente se, todo ponto é um subconjunto fechado de $\mathbf{X}$.

Isso significa que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, se $\langle \mathbf{X}, \mathrm{T} \rangle$ é $\mathcal{T}_1$, então $\{\mathbf{x}\} \notin \mathrm{T}$, pois como $\overline{\{\mathbf{x}\}} = \{\mathbf{x}\}$, então por definição de conjunto fechado, $\mathbf{X} - \{\mathbf{x}\} \in \mathrm{T}$. Portanto, a topologia discreta $\wp(\mathbf{X})$ não é $\mathcal{T}_1$.

Corolário 3.2.19: (Acióly[6], 1991, p. 82)

Todo espaço topológico $\mathcal{T}_1$ é $\mathcal{T}_0$.

Definição 3.2.20: (*Espaço Topológico $\mathcal{T}_2$* ou *Espaço de Hausdorff*)

Um espaço topológico $\langle X, \mathrm{T} \rangle$ diz-se $\mathcal{T}_2$ ou de ***Hausdorff*** se dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem os abertos $A, A' \in \mathrm{T}$ com $x \in A$, $y \in A'$ e $A \cap A' = \varnothing$.

Corolário 3.2.21: (Acióly[6], 1991, p. 82)

$\mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_0$.

No entanto, existem espaços topológicos $\mathcal{T}_0$ que não são $\mathcal{T}_1$, por exemplo, o espaço de Sierpinski; assim como existem espaços topológicos $\mathcal{T}_1$ que não são $\mathcal{T}_2$.

Teorema 3.2.22: (Lipschuts[21], 1973, p. 186)

Todo espaço métrico é de Hausdorff.

Assim, tanto a topologia usual da reta como o espaço topológico definido por Moore são de Hausdorff. Este espaço topológico não capta a noção de ordem de informação.

Teorema 3.2.23: (Lipschuts[21], 1973, p. 186)

Se X é de Hausdorff, então toda seqüência convergente em X tem limite único.

A partir de um espaço topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ de $\mathcal{T}_0$, é possível se estabelecer uma relação de ordem sobre X, como segue:

$x, y \in X$, $x \sqsubseteq y$ se, e somente se, todo $A \in \mathcal{T}$ que contém x, também contém y.

Proposição 3.2.24: (Acióly[6], 1991, p. 83)

$\langle X, \sqsubseteq\rangle$ é uma ordem parcial.

Assim, a todo espaço topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ de $\mathcal{T}_0$ está associado uma ***ordem parcial gerada pela topologia***. Reciprocamente, dado um cpo, existe uma topologia $\mathcal{T}_0$, que é compatível com a ordem. Essa topologia é chamada "***topologia de Scott***" e será visto a seguir.

3.3. TOPOLOGIA DE SCOTT

Definição 3.3.1: (*Aberto de Scott*)

Seja $\langle D, \sqsubseteq, \perp\rangle$ um cpo e $A \subseteq D$. A é um ***aberto de Scott***, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1) se $x \in A$ e $x \sqsubseteq y$, então $y \in A$;
2) se $\Delta \subseteq D$ é um conjunto dirigido e $\sqcup\Delta \in A$, então $\Delta \cap A \neq \emptyset$.

Esta definição pode ser comparada com a definição 3.2.4 do ponto de acumulação. Pode-se ainda, fazer a seguinte interpretação sobre esta definição da ***topologia de Scott/abertos de Scott***:

1) Se a informação **x** é suficiente para o processamento de A, então qualquer informação a mais é aceitável que seja também suficiente;
2) Se o limite de uma seqüência de aproximações bastante refinadas passa pela computação de A, então alguma das aproximações já passaram pela computação de A;
3) Conjuntos abertos correspondem a computações finitárias.

Proposição 3.3.2: (Acióly[6], 1991, p. 83)

Seja $\langle D, \sqsubseteq, \perp\rangle$ um cpo e $\mathsf{T} = \{A \subseteq D / A$ é um ***aberto de Scott***$\}$. Então T é uma topologia $\mathcal{T}_0$ sobre D, que em geral não é $\mathcal{T}_1$. T será chamado de "***topologia de Scott sobre*** D".

Demonstração:

1) $\emptyset, D \in \mathsf{T}$;
2) Sejam $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathsf{T}$. Se $x \in (\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2)$ e $x \sqsubseteq y$, então $x \in \mathbb{P}_1$ e $x \in \mathbb{P}_2$, e como $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathsf{T}$ e $x \sqsubseteq y$, então $y \in \mathbb{P}_1$ e $y \in \mathbb{P}_2$. Consequentemente, $y \in (\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2)$. Se $\Delta \subseteq D$ é um conjunto dirigido tal que $\sqcup\Delta \in (\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2)$, então $\sqcup\Delta \in \mathbb{P}_1$ e $\sqcup\Delta \in \mathbb{P}_2$ e como $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ são abertos de Scott, então $\Delta \cap \mathbb{P}_1 \neq \emptyset$ e $\Delta \cap \mathbb{P}_2 \neq \emptyset$, o que significa que $\Delta \cap (\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2) \neq \emptyset$.
3) Dado uma família arbitrária de abertos de Scott, $\mathsf{T} = \{\mathbb{P}_i\}_{i\in I}$, se $x \in \cup\mathsf{T}$ e $x \sqsubseteq y$, então existe $j \in J$ tal que $x \in \mathbb{P}_j \in \mathsf{T}$, ou seja, $y \in \mathbb{P}_j \subseteq \mathsf{T}$. Se $\Delta \subseteq D$ é um conjunto dirigido e $\sqcup\Delta \in \cup\mathsf{T}$, então existe $k \in I$ tal que $\sqcup\Delta \in \mathbb{P}_k \in \mathsf{T}$ e consequentemente, $\Delta \cap \mathbb{P}_k \neq \emptyset$, o que significa que $\Delta \cap \cup\mathsf{T} \neq \emptyset$.

Corolário 3.3.3: (Acióly[6], 1991, p. 84)

Seja $\langle D, \sqsubseteq, \perp\rangle$ um cpo e T é uma topologia sobre D. Então o conjunto $U_x = \{z \in D / z \not\sqsubseteq x\}$ é um ***aberto de Scott***.

Na aritmética de Moore, do ponto de vista topológico, o conceito de aberto baseia-se na noção de distância entre intervalos, o que significa que ele é um espaço métrico, e por conseguinte, um "***espaço de Hausdorff***". Isso mostrou-se incompatível com a noção de monotonicidade por inclusão; o que levou Aciòly[6] em 1991, introduzir uma topologia alternativa, baseada em ordem de informação para intervalos; a saber, uma ***topologia de Scott***.

Na seção seguinte, apresentar-se-á a noção de aproximação e existência em intervalos, cujos valores verdade serão abertos topológicos; apresentando a idéia de parcialidade - caracterizada pelas igualdade simples de Scott[26] e igualdade local de Santiago[8], onde essa última será de fundamental importância para o desenvolvimento desta dissertação, pois a idéia de conjunto local, que é modelo da teoria de Santiago[8], é estendida aqui, para Σ-álgebra local e é proposta uma adaptação da lógica equacional para Σ-álgebras locais; a saber, a lógica equacional local.

3.4. APROXIMAÇÃO E EXISTÊNCIA EM INTERVALOS

Do ponto de vista de domínios contínuos, intervalos são *informações* de números reais. Na matemática intervalar clássica, diz-se que dois intervalos [a, b] e [c, d] são iguais quando eles são o mesmo conjunto, i.e., se $a = c$ e $b = d$. Essa definição é bastante forte, pois não prever a situação de dois intervalos distintos, no sentido clássico, informarem sobre um mesmo número real poderem ser vistos como intervalos "***equivalentes***".

A axiomática da igualdade foi modificada por Scott[26] em 1977, com a finalidade de captar a parcialidade existente entre certos entes matemáticos. Para isso foi necessário alterar o axioma da reflexividade, o que levou a introdução de uma nova teoria chamada ***igualdade simples***. Baseado nessa teoria, Santiago[8] introduziu em 1999, uma noção de equivalência para intervalos que capta a natureza aproximativa dos mesmos. No que segue são apresentadas essas noções propostas por Scott em 1977, e a aplicação destas aos intervalos de Moore, proposto por Santiago[8] em 1999.

3.4.1: IDENTIDADE E EXISTÊNCIA

Considerando-se uma equação qualquer como "$\tau \approx \delta$", onde τ e δ são elementos de um conjunto de termos (i.e., expressões puramente sintáticas); por exemplo, a equação que expressa a *Lei da Associatividade*: "$a * (b * c) \approx (a * b) * c$", a interpretação dessa equação possui dois sentidos possíveis, a saber:

(i) Ambos os termos, $a * (b * c)$ e $(a * b) * c$, existem (i.e., possui significado) e são iguais; e

(ii) Se $a * (b * c)$ existe, então $(a * b) * c$ existe e são iguais e se $(a * b) * c$ existe, então $a * (b * c)$ existe e são iguais.

O sentido (i) chama-se "*igualdade*", e é representado por $a * (b * c) = (a * b) * c$, enquanto que o (ii) diz-se "*equivalência*", e é representado por $a * (b * c) \equiv (a * b) * c$.

Mostra-se a seguir através de um exemplo, como a ***parcialidade*** pode ser expressa conforme o sentido (ii).

Exemplo:

Como em todo semigrupo a operação binária "+" é total, então para todo termo a, b e c, os termos $a + (b + c)$ e $(a + b) + c$ existem e seus valores são os mesmos. Assim, o sentido (i) é mais adequado para formalizar a lei associativa para o caso dos semigrupos, ou seja:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$ ► *Lei associativa para semigrupos.*

Já para a teoria das categorias, a parcialidade da composição "$\circ$", obriga a formulação de uma declaração condicional para expressar a lei associativa, ou seja, dados os morfismos a, b e c:

1) **se** $a \circ (b \circ c)$ existe, então $(a \circ b) \circ c$ existe e $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$; e
2) **se** $(a \circ b) \circ c$ existe, então $a \circ (b \circ c)$ existe e $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

pois, nesse caso, nem todos os termos a, b e c, realizam-se em morfismos tal que $a \circ (b \circ c)$ e $(a \circ b) \circ c$ existam, já que dependem dos morfismos serem componíveis, para que a associatividade seja válida. Dessa forma utiliza-se o sentido (ii) para descrever a associatividade da composição:

$$a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c$$ ► *Lei associativa da composição.*

Como o sentido (i) não pressupõe qualquer condição para que a igualdade se dê, então, intuitivamente, ele implica na existência de ambos os termos. Com isso, o axioma da reflexividade da "*igualdade usual*" quando apresentada na forma de variáveis livres, não tem mais sentido para qualquer termo τ da linguagem, pois, como pode-se aplicar a regra da substituição, pode-se deduzir "$\vdash \tau = \tau$" para qualquer τ da linguagem; o que segundo o sentido (i), significa que τ existe para todo termo τ da linguagem, o que nem sempre é verdade para qualquer interpretação. Por exemplo, na equação $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, onde x, y e z não são componíveis, o termo $x \circ (y \circ z)$ pode não existir se x, y, z forem interpretados em funções não componíveis. Diante disso, para formalizar o sentido (i) de uma equação, foi necessário alterar o axioma da reflexividade. Essa modificação no axioma da reflexividade foi introduzida por Scott[26] em 1977 e a axiomática resultante foi chamada "***igualdade simples***", cujos modelos foram denominados ***conjuntos*** $\boldsymbol{\Omega}$ ou $\boldsymbol{\Omega}$***-sets***.

Axiomas da Igualdade Simples:

(1) $a = a \leftrightarrow \mathcal{E}a$ ► ***Refl.***;
(2) $a = b \rightarrow b = a$ ► ***Simetria***;
(3) $a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$ ► ***Transitividade***.

Com esses axiomas pode-se provar a proposição $a = b \rightarrow \mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b$, que formaliza o sentido (i) de "$\tau \approx \delta$", da seguinte maneira: se $a = b$ então $b = a$ por simetria e $a = a$ por transitividade e $\mathcal{E}a$ aplicando MP a (refl.). Similarmente, obtém-se $b = b$ e por conseguinte $\mathcal{E}b$ por MP, e por fim deriva-se $\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b$, logo:

$$a = b \rightarrow \mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b \qquad (3.4.1.a)$$

A teoria da *igualdade simples* formaliza a noção de igualdade na ausência de outras primitivas no sistema (operações e predicados). Caso o sistema possua outras primitivas, é necessário obter um princípio de substituição de "*iguais por iguais*", que preliminarmente, teria uma forma como:

$$[a = b \wedge \varphi(a)] \rightarrow \varphi(b) \qquad (3.4.1.b)$$

Mas, como igualdade implica em existência, deve-se direcionar para outro princípio de substituição de "*iguais por iguais*". Esse princípio deve ser baseado no sentido (ii) e na idéia de que coisas que não existem são num certo sentido equivalentes, e são equivalentes as existências (ou não existência) de duas coisas equivalentes. Portanto, assumindo os axiomas da igualdade simples, pode-se formalizar o sentido (ii):

"Se τ existe, então δ existe e $\tau = \delta$, e se δ existe, então τ existe e $\tau = \delta$", que é formalizado pela seguinte asserção:

$[\mathcal{E}a \rightarrow \mathcal{E}b \wedge a = b] \wedge [\mathcal{E}b \rightarrow \mathcal{E}a \wedge a = b]$, o que eqüivalente à $\boldsymbol{\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b \rightarrow a = b}$.

Decorre daí a definição formal da ***equivalência***, dado pelo seguinte axioma:

$$\boldsymbol{a \equiv b} \leftrightarrow [\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b \rightarrow a = b] \qquad (3.4.1.c)$$

Note que segundo essa definição, existem apenas dois casos em que $a \not\equiv b$, i.e., $a \equiv b \rightarrow \bot$, são eles:

a) $\neg\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b$, i.e., $\mathcal{E}a \rightarrow \bot \wedge \mathcal{E}b$;
b) $\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b \wedge a \neq b$, i.e., $\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b \wedge a = b \rightarrow \bot$.

Isso é verificado rigorosamente por:

a) Suponha que $a \equiv b$, se $\mathcal{E}a \to \perp$ e $\mathcal{E}b$, então por definição $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b \to a = b$, como $\mathcal{E}b$ então $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b$ e por Modus Ponens (MP) $a = b$, mas conforme a propriedade *(3.4.1.a)*, $a = b \to \mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b$. Novamente por MP $\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b$, logo $\mathcal{E}a$ e novamente por MP, com a 2ª hipótese, obtém-se $\perp$. Logo $a \equiv b \to \perp$, i.e., $\neg a \equiv b$.

b) Supondo $a \equiv b$, se $\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b$ e $a = b \to \perp$, então por definição $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b \to a = b$, pela 2ª hipótese $\mathcal{E}a$, logo $\mathcal{E}(a) \vee \mathcal{E}(b)$ e por MP $a = b$. Novamente por hipótese e MP obtém-se $\perp$. Logo $a \equiv b \to \perp$, i.e., $\neg a \equiv b$.

Os demais casos, i.e., quando

1º) $\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}b \wedge a = b$; e

2º) $\neg\mathcal{E}a \wedge \neg\mathcal{E}b$,

tem-se $a \equiv b$ verdadeiro devido a implicação $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b \to a = b$.

Logo, pode-se definir um princípio de *substituição de iguais por iguais*, através do seguinte axioma:

"***Axioma da equivalência para uma fórmula arbitrária*** $\varphi(x)$"

(**eq**) $[\boldsymbol{a \equiv b} \wedge \varphi(a)] \to \varphi(b)$ (para qualquer fórmula de $\varphi(a)$). *(3.4.1.d)*

A partir da equivalência e da quantificação, é possível redefinir a existência:

($\mathcal{E}$) $\mathcal{E}\boldsymbol{x} \leftrightarrow \exists y. x \equiv y$ *(3.4.1.e)*

Essa definição segue facilmente das leis da $\exists$, juntamente com $\boldsymbol{x \equiv x}$ e (**eq**), segundo (Scott[26], 1977, p. 666).

Os modelos dessa teoria são denominados de **conjuntos Ω** ou **Ω-sets** e possuem a seguinte definição.

Definição 3.4.1.1: Seja Ω uma ***álgebra de Heyting completa*** (**cHa**). Um Ω-set A é um conjunto $|A|$ equipado com uma relação "Ω-valorada" $[\![\cdot = \cdot]\!] : |A| \times |A| \to \Omega$ satisfazendo

(i) $[\![a = b]\!] = [\![b = a]\!]$ ► ***Simetria***;

(ii) $[\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!] \leq [\![a = c]\!]$ ► ***Transitividade***.

e sobre qualquer Ω-set pode-se definir a extensão $\mathcal{E}:|A| \to \Omega$ e a equivalência $\equiv:|A| \times |A| \to \Omega$ por:

(iii) $\mathcal{E}a = [\![a = a]\!]$ ► ***Refl.***;

(iv) $[\![a \equiv b]\!] = (\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b) \to [\![a = b]\!]$.

Exemplo:

Seja $\langle I(R), [\![\bullet = \bullet]\!]:|A| \times |A| \to \Omega\rangle$ tal que Ω é a topologia usual da reta e $[\![[a, b] = [c, d]]\!] = (a, b) \cap (c, d)$. Então

1º) $\mathcal{E}[a, b] = [\![[a, b] = [a, b]]\!] = (a, b)$; e

2º) $[\![[a, b] \equiv [c, d]]\!] = \mathcal{E}[a, b] \cup \mathcal{E}[c, d] \to [(a, b) \cap (c, d)] =$

$\overline{[(a, b) \cap (c, d)]} \cup [(a, b) \cap (c, d)]$.

Proposição 3.4.1.2: Todo conjunto A é um Ω-set.

Demonstração: Como $\{0, 1\}$ é um cHa, e a igualdade usual é uma relação $=:A \times A \to \{0, 1\}$ é simétrica e transitiva, então a estrutura $\langle A, =\rangle$ é um Ω-set.

Proposição 3.4.1.3: Se $\boldsymbol{a \equiv b}$ e $\boldsymbol{b = c}$, então $\boldsymbol{a \equiv c}$.

Demonstração: Suponha que $a \equiv b$ e $b = c$, então por definição $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b \to a = b$. Suponha $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}c$, como $b = c$, então $\mathcal{E}a \wedge \mathcal{E}c$ e portanto $\mathcal{E}b$. Assim, $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b$ e por MP $a = b$. Tem-se então $a = b \wedge b = c$ e por transitividade, $a = c$, logo $\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}c \to b = c$ é verdadeiro.

Proposição 3.4.1.4: Se $a = b$ então $a \equiv b$.

Demonstração: A asserção acima possui a seguinte forma em lógica: $a = b \to (\mathcal{E}a \vee \mathcal{E}b \to a = b)$, que uma tautologia da forma $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

Definição 3.4.1.5: (***Operações e Relações***)

Uma **operação n-ária F** sobre um **Ω-set** ***A*** é uma função $F:|A|^n \rightarrow |A|$ que é ***≡-extensional***, no seguinte sentido:

$$[\![a_1 \equiv b_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![a_n \equiv b_n]\!] \leq [\![F(a_1, \ldots, a_n) \equiv F(b_1, \ldots, b_n)]\!].$$

Uma **relação R** sobre *A* é uma função $R:|A|^n \rightarrow \Omega$ que é ***≡-extensional***, no sentido que

$$[\![a_1 \equiv b_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![a_n \equiv b_n]\!] \wedge R(a_1, \ldots, a_n) \leq R(b_1, \ldots, b_n).$$

Operações e relações que envolvem vários conjuntos são definidas similarmente, onde cada conjunto é interpretado como um Ω-set. Uma ***coleção de operações e relações sobre A*** diz-se uma ***estrutura sobre A***.

Essas definições garantem que o axioma da equivalência:

$$\textbf{(eq)} \ [\varphi(a) \wedge a \equiv b] \rightarrow \varphi(b) \qquad (3.4.1.f)$$

torna-se válido (pela usual indução sobre a estrutura de φ) (Scott[26], 77, p. 359).

No que segue, são apresentados alguns exemplos da aplicação do predicado de existência em situações que envolvam elementos parcialmente definidos.

Exemplo 1: (*Teoria das Categorias*)

Definição 3.4.1.6: (***Categorias***)

Uma categoria *C* é dada por:

1) Uma coleção *Obj(C)*, de *C-objetos*, *X, Y, Z, ...* ;
2) Para cada par ordenado *(X, Y)* de *C-objetos*, existe uma classe *mor(X, Y)* de *C*-morfismos de *X* e *Y*;
3) Uma operação que associa a cada *C-morfismos f*, um *C-objeto* dom(*f*), e outra operação que associa um *C-objeto cod*(*f*), assim, se X = *dom*(*f*) e Y = *cod*(*f*), pode-se exibir isto como: $f{:}X \rightarrow Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$;

4) Uma operação que associa a cada par (g, f) de *C-morfismos* com dom(g) = cod(f) um *C-morfismo* $g \circ f$, chamada composição de f e g; e onde $dom(g \circ f) = dom(f)$, $cod(g \circ f) = cod(g)$, e as seguintes condições são satisfeitas:

Lei Associativa: Dados $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

5) Um *C-morfismo* $id_X : X \to X$, para cada *C-objeto* X, chamado identidade de X, e tal que a seguinte lei seja satisfeita:

Lei da Identidade: Para qualquer *C-morfismo* $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, então $id_X \circ f = f$ e $g \circ id_X = g$

Essa definição significa que uma categoria possui:

- As operações totais dom e cod;
- A operação binária, associativa e parcial "$\circ$";
- A operação total "id" que satisfaz as leis de identidade, a direita e a esquerda.

Segundo Scott[26], a forma equacional dos axiomas da teoria das categorias carrega uma sugestão de Peter Freyd e parece mais simples que aquelas dadas por (Maclane[27], p. 9); a saber:

(1) $\mathcal{E}x \leftrightarrow \mathcal{E}\mathrm{dom}(x)$;

(2) $\mathcal{E}x \leftrightarrow \mathcal{E}\mathrm{cod}(x)$;

(3) $\mathcal{E}(x \circ y) \leftrightarrow \mathcal{E}\mathrm{dom}(x) = \mathcal{E}\mathrm{cod}(y)$;

(4) $x \circ (y \circ z) \equiv (x \circ y) \circ z$;

(5) $x \circ \mathrm{dom}(x) \equiv x$;

(6) $\mathrm{cod}(x) \circ x \equiv x$.

Observa-se que a introdução do predicado de existência, explicitamente em (1) e (2), e implicitamente nas equivalências de (4), (5) e (6), expressam a noção de parcialidade envolvida nas operações, de maneira que a parcialidade de "$\circ$", expressa pelo predicado de existência, não necessite, como usualmente, da expressão meta-linguística condicional:

"se *x, y, z* são componíveis então...",

pois, na lógica subjacente é permitido lidar com termos como $x \circ (y \circ z)$ e $(x \circ y) \circ z$, sem pressupor a existência de ambos.

Exemplo 2: (*Seções Contínuas*)

Definição 3.4.1.7: (*Seções Contínuas*)

A classe de todas as funções contínuas de valores reais, definidas sobre algum aberto euclidiano é chamada "***classe das seções contínuas***" e denotada por:

$R_R = \cup\{[O \to \mathbb{R}]/O \in U\}$, onde U é a topologia usual da reta.

Essa classe possui funções como $f \in [(3, 4) \to \mathbb{R}] \subseteq R_R$ e $g \in [(5, 6) \to \mathbb{R}] \subseteq R_R$. A parcialidade dessas funções é revelada pelo local onde elas estão definidas. Assim, o domínio de f, (3, 4), revela a sua parcialidade em $\mathbb{R}$. Agora, uma teoria de igualdade capaz de captar essa noção, é a "***teoria da igualdade simples***", onde a interpretação dos ***predicados de existência*** "$\mathcal{E}a$" e de ***igualdade*** "=" é dado pelas seguintes funções.

Definição 3.4.1.8.

1) $\mathcal{E}: R_R \to U$; e
2) $[\![\bullet = \bullet]\!] : |R_R| \times |R_R| \to U$, onde U é a topologia euclidiana sobre R; e
   a) $\mathcal{E}(f) = \text{dom}(f)$; e
   b) $[\![f = g]\!] = \cup\{O \subseteq \mathcal{E}(f) \cap \mathcal{E}(g) \,/\, f/O = g/O,\ \forall O \in U\}$, onde f/O e g/O são as restrições das funções f e g ao conjunto aberto O.

Assim, $\mathcal{E}(f)$ determina o local onde f está definida, e portanto revela a sua parcialidade, enquanto que $[\![\bullet = \bullet]\!]$ determina o local onde f e g coincidem. Segundo (Fourman & Scott[28], p. 340, 365-366), R_R munido da função $[\![\bullet = \bullet]\!]$ é um modelo da ***teoria da igualdade simples***, onde os axiomas são realizados através das seguintes propriedades:

1. $[\![f = f]\!] = \mathcal{E}(f) = \text{dom}(f)$ ► ***Refl***.
2. $[\![f = g]\!] = [\![g = f]\!]$ ► ***Simetria***
3. $[\![f = g]\!] \cap [\![g = h]\!] \subseteq [\![f = h]\!]$ ► ***Transitividade***.

A figura abaixo mostra o local onde f e g existem, ou seja, $\mathcal{E}(f) = (a, b)$ e $\mathcal{E}(g) = (c, d)$ e as mesmas coincidem em (e, f), i.e., $[\![f = g]\!] = (e, f)$, significando que (e, f) fornece uma medida de igualdade entre f e g.

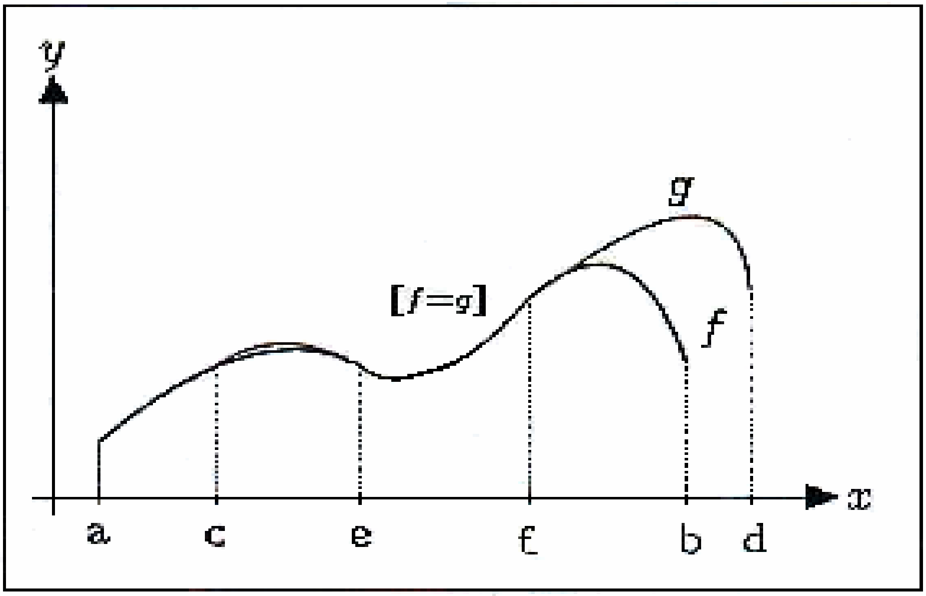

Figura 3.4.1.9. Igualdade local entre duas funções contínuas

Exemplo 3: (*Reais Parciais*)

A partir dessa idéia, em 1999 Santiago[8] definiu a noção de igualdade simples entre intervalos, baseado na relação de aproximação entre intervalos, introduzida por Aciòly[6] em 1991. Para isso, foi usada a função $[\![\bullet = \bullet]\!]$ para representar uma medida de igualdade entre intervalos que aproximam um mesmo número real. Como para todo $x \in [a, b]$, $[a, b] \ll [x, x] \leftrightarrow x \in (a, b)$, onde a ordem auxiliar "$\ll$" formaliza a noção de aproximação de intervalos, o aberto (a, b) é o local onde $[a, b]$ existe como uma aproximação de números reais. Essa idéia é formalizada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{E}[a, b] = (a, b) \tag{3.4.1.g}$$

Essa definição deu origem à ***noção de medida de igualdade entre intervalos***, formalizando a seguinte asserção: "***dois intervalos que aproximam os mesmos números reais possuem uma medida de igualdade***". Essa "***medida de igualdade***", é precisamente, o conjunto dos números reais que ambos aproximam, ou seja, duas aproximações intervalares $[a, b]$ e $[c, d]$ coincidem em $(a, b) \cap (c, d)$. A formalização completa dessa idéia é mostrada a seguir.

Definição 3.4.1.10: Dado o conjunto dos intervalos $\mathbb{IR}$, as funções $\mathcal{E}:\mathbb{IR} \to \mathtt{U}$, e $[\![\bullet = \bullet]\!]:\mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \to \mathtt{U}$, são respectivamente, definidas por:

$$\mathcal{E}([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}: [a, b] \ll [x, x]\} = (a, b); \text{ e} \qquad (3.4.1.h)$$

$$[\![[a, b] = [c, d]]\!] = \mathcal{E}([a, b]) \cap \mathcal{E}([c, d]) \qquad (3.4.1.i)$$

Corolário 3.4.1.11. (Santiago[8], 1999, p. 73)

$$\mathcal{E}([a, b]) \cap \mathcal{E}([c, d]) = \mathcal{E}([a, b] \cap [c, d]) \qquad (3.4.1.j)$$

Observa-se que $\mathcal{E}([a, b])$ é o local onde a aproximação $[a, b]$ está definida, enquanto $[\![[a, b] = [c, d]]\!]$ é o local onde os intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ aproximam os mesmos números reais.

As figuras abaixo ilustram as idéias de existência em intervalos e igualdade simples entre dois intervalos.

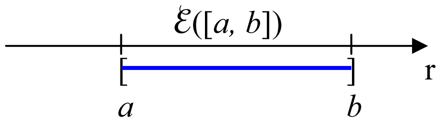

Figura 3.4.1.12. *Existência em Intervalos*

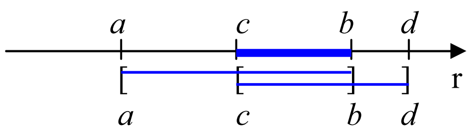

Figura 3.4.1.13. *Igualdade Local entre Intervalos*

Onde $\begin{cases} \mathcal{E}([a, b]) = (a, b) \\ \mathcal{E}([c, d]) = (c, d) \\ [\![[a, b] = [c, d]]\!] = (a, b) \cap (c, d). \end{cases}$

Dessa maneira, $\mathbb{IR}$ munido da função $[\![\bullet = \bullet]\!]$ é um modelo da teoria de igualdade simples de Scott, pois satisfaz as propriedades abaixo:

Proposição 3.4.1.14. (Santiago[8], 1999, p. 74)

1. $[\![[a, b] = [a, b]]\!] = \mathcal{E}([a, b])$ ► ***Refl.***
2. $[\![[a, b] = [c, d]]\!] = [\![[c, d] = [a, b]]\!]$ ► ***Simetria***
3. $[\![[a, b] = [c, d]]\!] \cap [\![[c, d] = [e, f]]\!] \subseteq [\![[a, b] = [e, f]]\!]$ ► ***Transitividade***.

Demonstração:

1) $[\![[a, b] = [a, b]]\!] \overset{\text{def}}{=} (a, b) \cap (a, b) = (a, b) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{E}[a, b]$;

2) $[\![[a, b] = [c, d]]\!] \overset{\text{def}}{=} (a, b) \cap (c, d) = (c, d) \cap (a, b) \overset{\text{def}}{=} [\![[c, d] = [a, b]]\!]$;

3) $[\![[a, b] = [c, d]]\!] \cap [\![[c, d] = [e, f]]\!] \overset{\text{def}}{=} ((a, b) \cap (c, d)) \cap ((c, d) \cap (e, f)) = ((a, b) \cap (e, f)) \cap (c, d) \subseteq ((a, b) \cap (e, f)) \overset{\text{def}}{=} [\![[a, b] = [e, f]]\!]$.

A partir dessa definição Santiago[8] observou que as propriedades algébricas dos números reais que antes não eram totalmente verificadas nos intervalos de Moore, agora apresentavam-se através de igualdade simples de Scott. O teorema abaixo mostra explicitamente isso.

Teorema 3.4.1.15: (Santiago[8], 1999, p. 78)

Seja $\overline{\mathbf{0}}$ um intervalo simétrico, ou seja, $\underline{\mathbf{X}} = -\overline{\mathbf{X}}$, e $\bar{1}$ um intervalo não-degenerado cujo ponto médio é 1, então para todo intervalo não-degenerado X, Y e Z, tem-se:

1. $[\![X + (Y + Z) = (X + Y) + Z)]\!] \neq \phi$
2. $[\![X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z)]\!] \neq \phi$
3. $[\![X + Y = Y + X]\!] \neq \phi$
4. $[\![X \cdot Y = Y \cdot X]\!] \neq \phi$
5. $[\![X + \bar{0} = X]\!] \neq \phi$
6. $[\![X \cdot \bar{1} = X]\!] \neq \phi$
7. $[\![X - X = \bar{0}]\!] \neq \phi$
8. $[\![X \cdot X^{-1} = \bar{1}]\!] \neq \phi$, com $0 \notin X$
9. $[\![X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)]\!] \neq \phi$.

Considerando o resultado desse teorema, observa-se que a terminologia "reais parciais" introduzida por Aciólу[6] em 1991, é adequada, pois as propriedades dos intervalos não degenerados assemelham-se às propriedades algébricas dos reais" (Santiago[8], 1999, p. 79). Dessa maneira, o conjunto dos intervalos não-degenerados munidos da aritmética intervalar e da igualdade local, pode ser chamado "***conjunto dos reais parciais***", denotado pela seguinte estrutura:

$$\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, /, [\![\bullet = \bullet]\!] \rangle.$$

No que segue, será apresentada a teoria das Σ-álgebras, onde é descrita uma fundamentação da noção de álgebra ligada a alfabetos: as chamadas Σ-álgebras. A partir dessa noção será desenvolvida a proposta desta dissertação.

CAPÍTULO 4

4.1. ÁLGEBRAS

Em 2000, Santiago[33] adaptou o axioma da transitividade da igualdade simples de Scott, a fim de solucionar alguns problemas que iriam ocorrer na teoria formal da álgebra intervalar, quando aplicada a igualdade simples de Scott, dando origem assim, a teoria da igualdade local. Essa axiomática é apresentada na seção 5.1.1, como parte da formalização de álgebra local aqui proposta. Antes porém, no que segue, apresenta-se a noção de Σ-álgebra, que será o ponto de partida para a formalização proposta.

A seguir, apresenta-se alguns conceitos básicos sobre Σ-álgebras, classes equacionais e lógica equacional. Deseja-se com isso, fazer um encaminhamento teórico e preliminar do propósito desta dissertação; a saber: *construir uma teoria algébrica para equações locais,* partindo da noção de igualdade local, introduzida por Santiago[33] em 2000.

4.1.1. ASSINATURA

Uma assinatura é um conjunto (finito ou infinito) de símbolos de funções, denotado por Σ, onde cada símbolo de função tem associado uma aridade (número de argumentos).

Exemplo:

Seja Σ = {Zero, Succ, Pred, Plus} uma assinatura. Então, pode-se destacar o argumento de cada símbolo de função desta assinatura:

- Zero $\rightarrow$ sem argumento (por se tratar de uma constante)
- Succ(x) $\rightarrow$ Um argumento
- Pred(x) $\rightarrow$ Um argumento
- Plus(m, n) $\rightarrow$ Dois argumentos

Formalmente, a aridade de uma assinatura é a quantidade de elementos que um símbolo de função pode manipular. Assim:

- aridade (Zero) = $\varnothing$
- aridade (Succ) = 1
- aridade (Pred) = 1
- aridade (Plus) = 2.

Associando-se à assinatura acima, os números naturais, numa interpretação natural, tem-se:

- $Zero_N = 0$ $\rightarrow Zero_N: 0 \rightarrow N$
- $Succ_N(n) = n + 1$ $\rightarrow Succ_N: N \rightarrow N$
- $Pred_N(n) = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 0 \\ k, \text{ se } n = (k+1) \text{ com } k, n \in N \end{cases}$ $\rightarrow Pred_N: N \rightarrow N$
- $Plus_N(n, m) = n + m$ $\rightarrow Plus_N(n, m): N^2 \rightarrow N$.

4.1.2. Σ-ÁLGEBRA

Uma Σ-álgebra é um par $\langle A, \Sigma_A \rangle$, significando que uma assinatura Σ é interpretada em A. Assim,

- *A* é um conjunto base chamado “carrier” ou “sort”**;**
- Σ_A é um conjunto de funções atuando sobre *A*, i.e., $\Sigma_A = \{f_A : A^n \rightarrow A \;/\; f \in \Sigma\}$ e a aridade de f é N.

Em outras palavras, uma Σ-álgebra interpreta a assinatura Σ, onde o sort *A* possui uma estrutura imposta pelas funções de Σ_A, no sentido de que os elementos de *A* só podem ser manipulados ou acessados usando essas funções. Uma dada assinatura pode ter diferentes interpretações, até mesmo para o mesmo sort.

Exemplo:

Considerando a assinatura Σ = {Zero, Succ, Pred, Plus} com aridade como indicada abaixo, tem-se que $\langle N, \Sigma_N \rangle$ é uma Σ-álgebra, onde:

i) *N* é o conjunto dos números naturais;

ii) Σ_N pode ser dada por:

a) $Zero_N: 0 \rightarrow N$ $\rightarrow Zero_N = 0$

b) $Succ_N$: N → N → $Succ_N(n) = n + 1$

c) $Pred_N$: N → N → $Pred_N(n) = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 0 \\ k, \text{ se } n = (k+1) \text{ com } k, n \in N \end{cases}$

d) $Plus_N(n, m)$: N^2 → N → $Plus_N(n, m) = n + m$. ("+" é a aritmética usual)

Outra possível interpretação para os números naturais, seria atribuir 1 para a função $Zero_N$ ou associar o símbolo de multiplicação a função $Plus_N(n, m)$ no lugar da adição.

4.1.3. SINTAXE

A ***sintaxe*** de uma linguagem corresponde a uma *álgebra de símbolos*, chamada *álgebra dos termos*. Esses termos representam os elementos das Σ-álgebras que interpretam a assinatura.

4.1.4. SEMÂNTICA

A ***semântica*** de uma linguagem está relacionada ao significado dos termos, os quais são elementos de uma Σ-álgebra *A*.

4.1.5. Σ-HOMOMORFISMOS

Seja $\langle A, \Sigma_A \rangle$, $\langle B, \Sigma_B \rangle$ duas Σ-álgebras e h uma função de A em B. Então, h é um ***Σ-homomorfismo*** se, para todo $f \in \Sigma$ de aridade k: $h(f_A(a_1, ..., a_k)) = f_B(h(a_1), ..., h(a_k))$.

A figura abaixo ilustra um Σ-homomorfismo, onde duas Σ-álgebras preservam a interpretação de um símbolo de função $f \in \Sigma$.

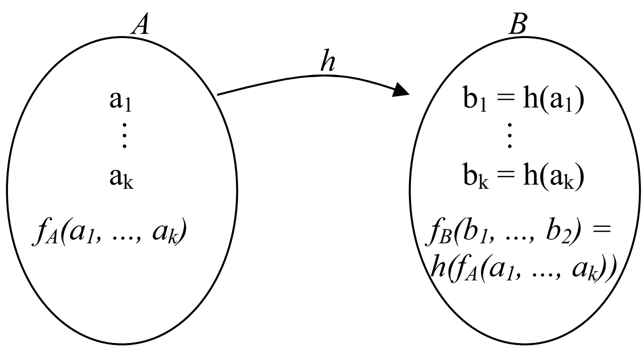

Figura 4.1.5.1. *Σ-homomorfismo*

Observa-se que $h(f_A(a_1, ..., a_k)) = f_B(b_1, ..., b_2) = f_B(h(a_1), ..., h(a_k))$. Caso h seja uma função bijetora, então diz-se que h é um ***Σ-isomorfismo***.

4.1.6. Σ-ÁLGEBRA INICIAL NUMA CLASSE

Definição 4.1.6.1: Seja $\mathbb{C}$ uma classe de Σ-álgebras. Então uma Σ-álgebra *I* em $\mathbb{C}$ é inicial se para toda Σ-álgebra *J* em $\mathbb{C}$ existe um único Σ-homomorfismo de *I* para *J*.

4.1.7. Σ-ÁLGEBRA DOS TERMOS (T_Σ)

Para toda assinatura Σ, existe uma Σ-álgebra bastante importante, chamada "*Σ-Álgebra dos Termos, denotada por* T_Σ". Essas Σ-álgebras são puramente objetos formais. O sort é formado a partir de seqüências de símbolos ou strings, construídas através dos símbolos de funções de Σ.

Definição 4.1.7.1: Seja T_Σ o conjunto dos termos sobre Σ. T_Σ é um conjunto mínimo de strings se:

(i) $f \in \Sigma$ tem aridade 0, então o string consiste do símbolo $f \in T_\Sigma$;

(ii) $f \in \Sigma$ tem aridade k > 0, então o string é da forma $f(t_1, ..., t_k) \in T_\Sigma$, sempre que $\boldsymbol{t_1, ..., t_k}$ ***são strings de*** $\boldsymbol{T_\Sigma}$

Assim, os elementos de T_Σ são strings formados por parênteses e vírgulas, juntamente com os símbolos de Σ, que podem ser construídos usando as regras (i) e (ii) acima. Note que, se Σ não contém funções de aridade "Zero", então T_Σ é vazio. As funções sobre esse conjunto têm como objetivo, construir novos termos a partir de termos já construídos.

Definição 4.1.7.2: (***Operações sobre*** T_Σ)

Para $f \in \Sigma$ de aridade *k*, seja $f_{T_\Sigma} : T_\Sigma^k \to T_\Sigma$ uma função que mapeia uma tupla de termos $\langle t_1, ..., t_k \rangle$ no termo de $f(t_1, ..., t_k)$. Se *f* tem *arid = zero*, então isso significa que f_{T_Σ} é simplesmente uma constante em T_Σ, consistindo da string "*f*". f_{T_Σ} diz-se uma operação k-ária sobre T_Σ.

Exemplo:

Seja Σ = {Zero, Succ, Pred, Plus} tal que arid(Zero) = 0, arid(Succ) = 1 e arid(Pred) = 1 e arid(Plus) = 2. Então T_Σ contém os termos:

- Zero, Succ(Zero), Succ(Succ(Zero)), Succ(Succ(Succ(Zero))), ...
- Pred(Zero), Pred(Pred(Zero)), Pred(Pred(Pred(Zero))), ...
- Succ(Pred(Zero)), Pred(Succ(Zero)), ...
- Plus(Zero, Zero), Plus(Pred(Zero), Zero), ...

Quadro 4.1.7.3. Obtenção das funções T_Σ a partir das funções de Σ.

$f \in \Sigma$	Argumento	$f_{T_\Sigma} : T_\Sigma^k \to T_\Sigma$	T_Σ
Zero	-	Zero: $T_\Sigma^0 \to T_\Sigma$	Zero
Succ	Zero	Succ: $T_\Sigma^1 \to T_\Sigma$	Succ(Zero)
Succ	Succ(Zero)	Succ: $T_\Sigma^1 \to T_\Sigma$	Succ(Succ(Zero))
Succ	Succ(Succ(Zero))	Succ: $T_\Sigma^1 \to T_\Sigma$	Succ(Succ(Succ(Zero)))
⋮	⋮	⋮	⋮
Pred	Zero	Pred: $T_\Sigma^1 \to T_\Sigma$	Pred(Zero)
Pred	Pred(Zero)	Pred: $T_\Sigma^1 \to T_\Sigma$	Pred(Pred(Zero))
⋮	⋮	⋮	⋮
Plus	(Zero, Zero)	Plus: $T_\Sigma^2 \to T_\Sigma$	Plus(Zero, Zero)
Plus	(Pred(Zero), Zero)	Plus: $T_\Sigma^2 \to T_\Sigma$	Plus(Pred(Zero), Zero)
⋮	⋮	⋮	⋮

A Σ-álgebra dos termos é de natureza sintática. Ela representa a função da sintaxe de uma linguagem. Na verdade, muitas linguagens de programação ou linguagens formais, em geral, podem ser especificadas de tal modo que suas sintaxes são vistas como Σ-álgebra dos termos de alguma assinatura Σ particular, cuja semântica é dada por outras Σ-álgebras através dos Σ-homomorfismos. Os Σ-homomorfismos, por sua vez, interpretam/traduzem uma Σ-álgebra noutra.

Exemplos:

1) Seja Σ = {Zero, Succ, Pred, Plus} e *in*: IN → Z uma função injetora: *in*(n) = n para todo n ∈ N. Então *in* não é um Σ-homomorfismo entre $\langle N, \Sigma_N \rangle$ e $\langle Z, \Sigma_Z \rangle$, pois $Pred_N(0) = 0$ e $in(Pred_N(0)) = 0$, mas $Pred_Z(in(0)) = -1$. Logo, $in(Pred_N(0)) \neq Pred_Z(in(0))$.

2) Seja Σ = {Zero, Succ, Pred, Plus} e seja PAR, o conjunto dos números naturais pares PAR = {0, 2, 4, ...}. Seja Σ_{PAR} denotado por:

   a) $Zero_{PAR} = 0$

   b) $Succ_{PAR} : PAR \rightarrow PAR$ é definido por $Succ_{PAR}(n) = n + 2$

   c) $Pred_{PAR} : PAR \rightarrow PAR$ é definido por $Pred_{PAR}(0) = 0$ e $Pred_{PAR}(n) = n - 2$ se $n > 0$.

   d) $Plus_{PAR} : PAR^2 \rightarrow PAR$ é definido por $Plus_{PAR}(n, m) = n + m$.

   Então, $\langle PAR, \Sigma_{PAR}\rangle$ é uma Σ-álgebra.

3) Seja ***in***: $N \rightarrow PAR$ a função injetora: ***in***(n) = 2n para todo $n \in N$. Então ***in*** é um Σ-homomorfismo. Para provar isto, precisa-se mostrar que um Σ-homomorfismo conserva com ***in*** uma ordem de h para todo símbolo de função $f \in \Sigma$. Cada caso é apresentado pela aritmética simples. Por exemplo:

   i) in $(Succ_N(n))$ = in(n + 1) = 2n + 2 e $Succ_N(in(n)) = Succ_N(2n) = 2n + 2$;

   ii) in $(Plus_N(n, m))$ = in (n + m) = 2n + 2m e $Plus_{PAR}(in(n), in(m)) = Plus_{PAR}(2n, 2m)$ = 2n + 2m.

Em geral, os Σ-homomorfismos comportam-se, muitas vezes, como funções ordinárias sobre conjuntos. Por exemplo: se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são Σ-homomorfismos, sua composição $f: A \rightarrow C$ também é um Σ-homomorfismo. Além disso, a função identidade (i) sobre A (i_A), é também um Σ-homomorfismo sobre alguma Σ-álgebra $\langle A, \Sigma_A\rangle$. A propriedade mais importante de álgebra dos termos é expressa em termos de homomorfismos.

Teorema 4.1.7.4: (*Hennessy*[31]*, 1988, p. 25*)

Para toda Σ-álgebra $\langle A, \Sigma_A\rangle$ existe um único Σ-homomorfismo $i_A: T_\Sigma \rightarrow A$.

A definição do sort da álgebra dos termos "T_Σ" acima, é indutivo. T_Σ é um conjunto de strings que contém símbolos de constantes e que são fechados sob as operações de álgebra dos termos, i.e., as operações de f_Σ, para cada $f \in \Sigma$. O método indutivo é a maneira mais natural de provar que todos os elementos de T_Σ possui uma determinada propriedade. Para provar que todos os termos possuem uma determinada propriedade P, é suficiente mostrar que:

i) todos os símbolos de constantes em Σ; possuem a propriedade P,

ii) assumindo que os termos $t_1, ..., t_k$ possuem a propriedade P, mostrar que os termos $f(t_1, ..., t_k)$ possuem a propriedade P para todo $f \in \Sigma$, com aridade $k > 0$.

Isto é chamado "*indução estrutural*". Também, pode-se usar uma "*indução estrutural*" para definir relações ou funções sobre T_Σ. Por exemplo, para definir uma função g sobre T_Σ é suficiente:

i) definir o resultado da aplicação de g ao símbolo de função constante;

ii) definir o resultado de aplicação de g para $f(t_1, ..., t_k)$ em termos de $g(t_1), ..., g(t_k)$, para todo $f \in \Sigma$, com aridade $k > 0$.

Seguindo esse raciocínio, tem-se a seguinte demonstração do teorema 4.1.7.4.

Demonstração:

Deve-se mostrar que o homomorfismo existe e ele é único.

1) Define-se i_A por indução estrutural sobre os termos. Todo termo em T_Σ é da forma $f(t_1, ..., t_k)$ para algum $f \in \Sigma$ de arid = k. Assumindo por indução que $i_A(t_1), ..., i_A(t_k)$ tenha sido definido, então definir-se-á $i_A(f(t_1, ..., t_k)) = f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k))$. Dessa maneira tem-se definido i_A para todo elemento em T_Σ (Hennessy[31], 1988, p. 26). É fácil provar que i_A é um homomorfismo. Seja $f \in \Sigma$ de arid = k, então:

$i_A(f_{T_\Sigma} (t_1, ..., t_k)) = i_A(f(t_1, ..., t_k))$, ► pela definição de f_{T_Σ}

$= f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k))$, ► pela definição de i_A.

2) Para mostrar que i_A é único, deve-se provar que ele coincide com todo Σ-homomorfismo de T_Σ para A. Seja h algum Σ-homomorfismo semelhante. Provar-se-á por indução estrutural que $i_A(t) = h(t)$ para todo $t \in T_\Sigma$. Então:

$i_A(f(t_1, ..., t_k)) = f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k))$ ► pela definição de i_A

$= f_A(h(t_1), ..., h(t_k))$ ► por indução estrutural

$= h(f_{T_\Sigma} (t_1, ..., t_k))$ ► pois h é um homomorfismo

$= h(f(t_1, ..., t_k))$ ► pela definição de f_{T_Σ}.

Assim, todo elemento de T_Σ é da forma $f(t_1, ..., t_k)$ para algum símbolo de função f, e segue que i_A e h coincidem.

Viu-se T_Σ como a *sintaxe de uma linguagem* e uma Σ-álgebra $\langle A, \Sigma_A \rangle$ como um *domínio semântico* ou *uma interpretação*. Pelo teorema acima, pode-se afirmar que toda expressão ou termo na linguagem tem um único significado em $\langle A, \Sigma_A \rangle$, ou seja, há uma única maneira de interpretar a linguagem em um domínio semântico.

Pode-se reafirmar o teorema 4.1.7.4, dizendo que "*T_Σ é inicial na classe de todas as Σ-álgebras*" (Hennessy[31], 1988, p. 27).

Um Σ-homomorfismo $f: A \to B$ é dito Σ-isomorfismo se f é uma função bijetora. Neste caso, A e B são ditos isomorfos como Σ-álgebras. Se A e B são isomorfos, então eles são, essencialmente idênticos, do ponto de visto estrutural de Σ.

Proposição 4.1.7.5: A e B são isomorfos como Σ-álgebras, se e somente se, existe dois Σ-homomorfismos: $h: A \to B$ e $g: B \to A$ tal que:

a) $h \circ g = id_B$

b) $g \circ h = id_A$.

Demonstração:

1) Supondo que $h: A \to B$ é um Σ-homomorfismo bijetivo, deve-se definir uma função g que satisfaça a proposição. Seja $g: B \to A$ definida por: $g(b) = a$ se $h(a) = b$. Então g é de fato uma função. Assim, para todo $b \in B$, existe exatamente um a tal que $h(a) = b$. Também, g é um Σ-homomorfismo, para todo $f \in \Sigma$ de aridade $k > 0$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} h(f_A(g(b_1), ..., g(b_k))) &= f_B(h \circ g(b_1), ..., h \circ g(b_k)), \quad \to \ h \text{ é um } \Sigma\text{-homomorfismo;} \\ &= f_B(b_1, ..., b_k), \quad \text{por definição de } g. \end{aligned}$$

Portanto, outra vez por definição de g, $g(f_B(b_1, ..., b_k)) = f_A(g(b_1), ..., g(b_k))$.

Finalmente, é fácil mostrar que $h \circ g = id_B$ e $g \circ h = id_A$.

2) Assumindo que g e h satisfazem as condições da proposição, deve-se mostrar que h é bijetivo e do qual segue que A e B são isomorfos como Σ-álgebras.
   a) assumindo $h(a_1) = h(a_2)$, então $g \circ h\ (a_1) = g \circ h(a_2)$. Assim, $g \circ h$ é uma identidade e segue que $a_1 = a_2$ e h é injetiva.
   b) Seja $b \in B$. Define-se a para ser $g(b)$. Então $h(a) = h \circ g(b) = b$. Logo $h \circ g$ é uma identidade, e portanto, h é sobrejetora.

Corolário 4.1.7.6: Se I_1 e I_2 são iniciais numa classe C de Σ-álgebras, então eles são isomorfos.

Demonstração: Desde que I_1 seja inicial em C e I_2 seja uma Σ-álgebra particular em C, existe um único Σ-homomorfismo i_1: $I_1 \to I_2$. Similarmente, desde que I_2 seja inicial, então existe um único Σ-homomorfismo i_2: $I_2 \to I_1$. Deles segue que $i_2 \circ i_1$: $I_1 \to I_1$ é um Σ-homomorfismo. Como $id_{I_1}: I_1 \to I_1$ é também um Σ-homomorfismo, pode-se concluir a inicialidade de I_1, pois $i_2 \circ i_1 = id_{I_1}$. Seguindo o mesmo raciocínio para I_2, pode-se concluir que $i_1 \circ i_2 = id_{I_2}$. Assim, I_1 e I_2 satisfazem as condições dada na proposição 4.1.7.4, e portanto, I_1, I_2 são isomorfos.

4.2. CLASSES EQUACIONAIS

Uma equação é determinada por termos que contém variáveis. A avaliação de tais termos numa Σ-álgebra é com respeito a atribuição de valores a essas variáveis. *Assim, uma Σ-álgebra satisfaz uma equação se a avaliação dos dois termos coincide para toda possível atribuição de valores para essas variáveis*. Por exemplo, a Σ-álgebra $\langle Z, \Sigma_Z \rangle$ satisfaz essas condições:

Pred(Succ(x)) = x,

Succ(Pred(x)) = x,

Logo, Pred(Succ(x)) = Succ(Pred(x)).

Definição 4.2.1: Seja $\langle A, \Sigma_A \rangle$ uma Σ-álgebra. A relação *R* sobre *A* é uma Σ-congruência se:

i) *R* é uma relação de equivalência;

ii) Para todo $f \in \Sigma$, se $\langle \underline{a}, \underline{a}' \rangle \in R$, então $\langle f_A(\underline{a}), f_A(\underline{a}') \rangle \in R$.

Seja *A/R* o conjunto das classes de equivalência, i.e., $A/R = \{[a]_R, a \in R\}$, onde $[a]_R = \{b \in A / a \; R \; b\}$ Para cada $f \in \Sigma$, pode-se definir sobre *A/R* a seguinte relação:

$$f_{A/R}([a_1]_R, ..., [a_k]_R) = [f_A(a_1, ..., a_k)]_R.$$

Lema 4.2.2: (*Hennessy*[31]*, 1988, p. 30*)

a) $\langle A/R, \Sigma_{A/R} \rangle$ é uma Σ-álgebra;

b) a função injetora *in: A* $\rightarrow$ *A/R*, definida por $in(a) = [a]_R$, é um Σ-homomorfismo.

Demonstração:

a) É suficiente mostrar que a definição dada acima, realmente define uma função. Deve-se mostrar que o resultado não depende da representação particular do $[a_i]_R$ escolhido. Seja $a_i' \in [a_i]_R$, com $0 \leq i \leq k$. Assim, $\langle a_i, a_i' \rangle \in R$ para cada *i*. Desde que *R* seja uma Σ-congruência, segue que $\langle f(\underline{a}), f(\underline{a}') \rangle \in R$, isto é, $f(\underline{a}') \in [f(\underline{a})]_R$.

b) Segue imediatamente da definição de $f_{A/R}$, que $f_{A/R}([a_1]_R, ..., [a_k]_R) = [f_A(a_1, ..., a_k)]_R$. Portanto, $\langle A/R, \Sigma_{A/R} \rangle$ é uma Σ-álgebra e a função *in*: $A \rightarrow A/R$ é um Σ-homomorfismo.

Definição 4.2.3: Seja $=_A$ uma Σ-congruência sobre T_Σ. Diz-se que A satisfaz $=_A$ se $i_A(t) = i_A(t')$ sempre que $\langle t, t' \rangle \in =_A$.

Teorema 4.2.4: (*Inicialidade para congruências*) (*Hennessy*[31]*, 1988, p. 31*)
Seja $\mathrm{C}(=_A)$ a classe de todas as Σ-álgebras que satisfazem $=_A$. A Σ-álgebra $T_\Sigma/=_A$ é inicial na classe $\mathrm{C}(=_A)$.

Demonstração:

1) Deve-se, primeiro provar que $T_\Sigma/=_A$ está de fato em $\mathrm{C}(=_A)$. A injeção natural *in*: $T_\Sigma \rightarrow T_\Sigma/=_A$ é um Σ-homomorfismo e como T_Σ é inicial na classe de todas as Σ-álgebras, ele deve coincidir com $i_{T_\Sigma/=_A}$, por este ser único. Assim, seja $\langle t, t' \rangle \in =_A$. Então:

   $i_{T_\Sigma/=_A}(t) = [t]_{=_A}$

   $= [t']_{=_A}$, dessa maneira, $\langle t, t' \rangle \in =_A$;

   $= i_{T_\Sigma/=_A}(t')$.

2) Seja $A \in \mathrm{C}(=_A)$. Definir h: $T_\Sigma/_{=_A} \rightarrow A$ por $h([t]_{=_A}) = i_A(t)$. Isto é uma função bem definida desde que, se $t' \in [t]_{=_A}$ então $\langle t, t' \rangle \in =_A$ e $i_A(t) = i_A(t')$ devido A satisfazer $=_A$. Além disso, h é um Σ-homomorfismo, desde que:
   $h(f_{T_\Sigma/=_A}([\underline{t}]_{=_A})) = h([f(\underline{t})]_{=_A}) = i_A(f(\underline{t})) = f_A(i_A(\underline{t})) = f_A(h([\underline{t}]_{=_A}))$.

3) Provar que h é o único homomorfismo de $T_\Sigma/=_A$ para A. Seja $h':T_\Sigma/=_A \rightarrow A$ algum Σ-homomorfismo. Definindo $i'_A: T_\Sigma \rightarrow A$ como $i'_A(t) = h'[t]_{=_A}$. Então
   $i'(f_{T_\Sigma}(\underline{t})) = h'([f(\underline{t})]_{=_A}) = h'(f_{T_\Sigma/=_A}([\underline{t}]_{=_A})) = f_A(h'([\underline{t}]_{=_A})) = f_A(i'_A(\underline{t}))$.
   Assim, i'_A é um Σ-homomorfismo. Porém, T_Σ é inicial na classe de todas as Σ-álgebras para que i'_A deva coincidir com i_A. Segue que $h'([t]_{=_A}) = i'_A(t) = i_A(t) = h([t]_{=_A})$, i.e., h' coincide com h.

Segundo (Hennessy[31], 1988, p. 31), esse teorema é interessante para um tipo particular de *Σ-congruência*, a qual é gerada por um conjunto de equações. Para definir, formalmente, como equações geram Σ-congruências, precisa-se de conceitos novos, como a introdução de variáveis numa assinatura, as noções de atribuição e substituição.

Definição 4.2.5: Seja X um conjunto de variáveis. Usa-se $x, x_1, x_2, x_3, \ldots,$ para representar essas variáveis de X. Pode-se estender qualquer assinatura Σ para uma nova assinatura $\Sigma(X)$, a qual tenha todos os símbolos de Σ e mais cada $x \in X$, onde as variáveis agora são vistas como constantes na assinatura $\Sigma(X)$.

Essa notação não padrão de $\Sigma(X)$ serve apenas para enfatizar o papel especial da nova constante. Também, deve-se usar a notação $T_\Sigma(X)$ para denotar a álgebra dos termos para uma assinatura $\Sigma(X)$. Os termos T_Σ, obviamente, serão também elementos de $T_\Sigma(X)$. A notação Σ-termos, é uma referência aos elementos de T_Σ, o qual quando não possui variáveis é, frequentemente, chamado na literatura, de "*termo fechado*", e quando as contém, de "*termos abertos*".

Definição 4.2.6: Seja A alguma Σ-álgebra. Uma *A-atribuição* para X é um mapeamento $\rho_A: X \rightarrow A$. Assim, ρ_A associa a toda variável $x \in$ X, um elemento $\rho_A(x) \in A$.

Teorema 4.2.7: (***Freeness***) (*Hennessy*[31]*, 1988, p. 32*)

Se A é uma Σ-álgebra e ρ_A é uma *A-atribuição* para X, então existe um único Σ-homomorfismo h_A de $T_\Sigma(X)$ para A tal que $h_A(x) = \rho_A(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração:

1) Definir h_A por indução estrutural em termos de $T_\Sigma(X)$.
   a) Se t é uma variável em X, faça $h_A(t) = \rho_A(t)$;
   b) Caso contrário, t tem a forma $f(\underline{t})$ para algum $f \in \Sigma$. Nesse caso, faça $h_A(f(\underline{t})) = f_A(h_A(\underline{t}))$. Dessa maneira, h_A está definido em todo $T_\Sigma(X)$.
2) Seja $h': T_\Sigma(X) \rightarrow A$ outro Σ(X)-homomorfismo que coincide com ρ_A em X. Deve-se mostrar por indução estrutural em t que $h(t) = h'(t)$ para todo $t \in T_\Sigma(X)$.
   a) t é uma variável em X. Então $h(t)$ *e* $h'(t)$ coincidem com $\rho_A(t)$;
   b) Caso contrário, t tem a forma $f(\underline{t}')$ para algum $f \in \Sigma$. Assim,

$$\begin{aligned} h(f(\underline{t}')) &= f_A(h(\underline{t}')), && \text{dessa maneira, } h \text{ é um } \Sigma\text{-homomorfismo} \\ &= f_A(h'(\underline{t}')), && \text{por indução estrutural} \\ &= h'(f(\underline{t}')), && \text{assim, } h' \text{ é um } \Sigma\text{-homomorfismo.} \end{aligned}$$

Nota-se que o teorema 4.2.7 pode ser visto como uma generalização do teorema 4.1.7.4. O referido teorema pode ser obtido tomando X como um conjunto vazio. O que importa no teorema é que todo *Σ-termo* com variáveis pode ser interpretado ou avaliado unicamente numa *Σ-álgebra A*, contando que as variáveis tenham sido ligadas aos elementos de A.

No resultado que segue, será conveniente denotar o *Σ-homomorfismo* determinado pelo teorema 4.2.7 com ρ_A. Observa-se que quando ρ_A é aplicado para elementos de T_Σ, ele realmente coincide com i_A. Isto pode ser visto na definição da prova de teorema 4.2.7.

Pela notação de *A-atribuição* é possível definir uma substituição dos termos de maneira natural.

Definição 4.2.8: A substituição é um *$T_\Sigma(X)$-atribuição*, i.e., ela associa a cada variável de X, um termo de $T_\Sigma(X)$.

A aplicação de uma substituição ρ para o termo t denotado por $t\rho$ é chamada "***instanciação de t***". Na verdade, a substituição ρ deveria ser denotado por $\rho_{T_{\Sigma(X)}}$, mas por conveniência omite-se o subscrito. Além disso, para enfatizar a natureza sintática da substituição, escreve-se $t\rho$ no lugar de $\rho(t)$. Mas, a notação mais usual de substituição é $\boldsymbol{t[\underline{t}'/\underline{x}]}$, onde $\underline{x}$ é uma seqüência finita de variáveis que ocorre em $\boldsymbol{t}$ e, $\boldsymbol{t_i'}$ é $\boldsymbol{\rho(x_i)}$ para todo $\boldsymbol{x_i}$ da seqüência $\underline{x}$. Se todo $\boldsymbol{\rho(x_i)}$ é um termo fechado, i.e., $\boldsymbol{\rho(x_i) \in T_\Sigma}$, então $\boldsymbol{\rho}$ é chamado uma "***substituição fechada***" e $\boldsymbol{t\rho}$ uma "***instanciação fechada de t***". Nota-se que "*instanciações fechadas são sempre termos fechados*", i.e., eles estão em T_Σ.

As condições de substituição do lema seguinte, comportam-se como em geral se esperaria com respeito as atribuições em geral. Se $\boldsymbol{\rho_A}$ é uma *A-atribuição* e $\boldsymbol{\rho}$ uma substituição, então $\boldsymbol{\rho_A \circ \rho}$ pode também ser visto como uma *A-atribuição*: "*ele associa a cada* $\boldsymbol{x}$, *o resultado da avaliação do termo* $\boldsymbol{\rho(x)}$ *de acordo com a A-atribuição* $\boldsymbol{\rho_A}$, *como no teorema 4.1.8.7*". Na expressão $\boldsymbol{\rho_A \circ \rho}$, interpreta-se $\boldsymbol{\rho_A}$ como um *Σ(X)-homomorfismo,* no lugar de uma simples *A-atribuição*.

Lema 4.2.9: (*Lema da substituição*) (*Hennessy*[31], *1988, p. 33*)

Para toda *A*-atribuição ρ_A e toda substituição ρ, a única extensão da *A*-atribuição $\rho_A \circ \rho$ à $T_\Sigma(X)$ é dada pela função **h(*t*)** $= \rho_A(t\rho)$.

Demonstração: A função h é obviamente um Σ-homomorfismo local e coincide com a *A*-atribuição $\rho_A \circ \rho$ nas variáveis, e de acordo com o teorema *Freeness*, h é único.

Este lema permite fazer atribuição e substituição de duas maneiras: primeiro, *"faz-se uma substituição em t e em seguida avalia-se o termo resultante em A"* e segundo, "*avalia-se em A o termo a ser substituído em t e depois avalia-se t usando essa atribuição modificada*". Uma instância particular deste lema é quando a A-atribuição é outra substituição. Tem-se então que $t(\rho \circ \rho') = (t\rho')\rho$.

Exemplos:

Seja o termo $t = 2x^2$, então:

a) Substitui-se *t* e depois avalia-se o termo substituído:

$\rho(x) = y^2$ ► Substituição

$t_\rho = 2(y^2)^2$ ► Extensão

$\rho_A(y) = 5$ ► Avaliação

$\rho_A(t_\rho) = 2(5^2)^2$ ► Extensão.

b) Avalia-se o termo a ser substituído e depois, avalia-se o termo original (*t*) usando a atribuição modificada:

$\rho_A(y) = 5$ ► Avaliação do termo a ser substituído (t_ρ)

$\rho(x) = y^2$ ► Substituição

$\rho'_A(x) = \rho_A(\rho(x))$

$\rho'_A(x) = \rho_A(y^2)$

$\rho'_A(x) = 5^2$

$\rho'_A(x) = 2(5^2)^2$ ► Extensão.

Define-se agora o que o lema 4.2.9 significa para uma álgebra que satisfaz um conjunto de equações.

Definição 4.2.10: (*Hennessy*[31], *1988, p. 33*)

Para $t, t' \in T_\Sigma(X)$, $t =_A t'$ se para toda *A-atribuição* ρ_A, $\rho_A(t) = \rho_A(t')$.

Quando aplicado a elementos de T_Σ (termos fechados), estes coincidem com a relação de congruência sobre T_Σ, c.f. a definição 4.2.3.

Definição 4.2.11: (*Σ-Equação*)

Uma ***Σ-equação*** é um par de termos $\langle t, t' \rangle \in T_\Sigma(X)$ e que são, freqüentemente, escritos na forma: $t = t'$. Uma relação R sobre $T_\Sigma(X)$ satisfaz um conjunto das equações E, se $E \subseteq R$, e uma Σ-álgebra A satisfaz um conjunto de equações E, se $E \subseteq =_A$, i.e., para toda Σ-equação $\langle t, t' \rangle \in E$ e toda *A-atribuição* ρ_A, $\rho_A(t) = \rho_A(t')$.

Teorema 4.2.12: (*Inicialidade para Equações*) (*Hennessy*[31]*, 1988, p. 34*)

Seja $\mathcal{C}(E)$ a classe das Σ-álgebras que satisfazem as equações em E. Para todo conjunto de Σ-equações E, $\mathcal{C}(E)$ tem uma Σ-álgebra inicial.

Demonstração: A prova é essencialmente uma aplicação do teorema 4.2.4 (*inicialidade para congruências*); a álgebra inicial da $\mathcal{C}(E)$ pode ser exibida na forma T_Σ/R para alguma congruência R particular. Existem diferentes maneiras de definir uma congruência R; aqui, será utilizada uma notação semelhante ao teorema supra citado, i.e., a congruência entre um conjunto de equações será exibida como "$=_E$".

Corolário 4.2.13: (*Inicialidade para Equações*) (*Hennessy*[31]*, 1988, p. 36*)

$T_\Sigma/=_E$ é inicial em $\mathcal{C}(E)$.

Demonstração: $\mathcal{C}(E) \subseteq \mathcal{C}(=_E)$ e $T_\Sigma/=_E$ é inicial em $\mathcal{C}(=_E)$ devido o teorema 4.1.8.4. Então para todo $A \in \mathcal{C}(E)$ existe um único Σ-homomorfismo de $T_\Sigma/=_E$ para A. Assim, resta mostrar que $T_\Sigma/=_E$ está realmente em $\mathcal{C}(E)$. Seja $\langle t, t' \rangle \in E$ e seja ρ um $T_\Sigma/=_E$–atribuição. Deve-se mostrar que $\rho(t) = \rho(t')$. Seja ρ' alguma substituição tal que $\rho(x) = [\rho'(x)]$ para toda variável x. Então, pode-se mostrar por indução estrutural sobre t que $\rho(t) = [t\rho']$. Agora, aplicando-se a regra da substituição para $t = t'$, com a substituição ρ', obtém-se:

$$t\rho' =_E t'\rho' \text{ e então } \rho(t) = [t\rho'] = t'\rho' = \rho(t').$$

No que segue, será apresentada uma lógica equacional, pela qual, equações são derivadas a partir das equações em E.

4.3. Sistemas Dedutivos

Mostrar-se-á nesta seção, que sistemas de fecho algébricos estão intimamente relacionados com sistemas dedutivos. Informalmente, tal relação pode ser ilustrada através de um exemplo do cálculo proposicional.

Exemplo:

Seja a assinatura $\Sigma = \{\neg, \rightarrow\}$ e $X = \{p, q, r, ...\}$, onde X é um conjunto de variáveis e $\Sigma(X) = \Sigma \cup X$. Dessa maneira, os elementos de $T_\Sigma(X)$ são chamados "***sentenças proposicionais***", e as deduções são baseadas na "***regra de inferência***":

$\dfrac{\alpha, \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$ (***Modus Ponens***).

Um ***sistema de provas formais*** para o cálculo proposicional é dado pelos *três axiomas* abaixo, mais a regra de inferência "*Modus Ponens – MP*".

A_1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

A_2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow r)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow r))$

A_3) $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

MP) $\dfrac{\alpha, \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$ (*Modus Ponens*).

Uma ***prova formal*** é uma seqüência de instâncias dos axiomas (A_1-A_3) e da aplicação da regra de inferência MP (Modus Ponens). Por exemplo, uma prova formal para a dedução de "$p \rightarrow p$", é dada pela seqüência "p_1, p_2, p_3, p_4, p_5" abaixo.

p_1) $p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$ Instância de A_1;

p_2) $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ Instância de A_2;

p_3) $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$ MP de p_1/p_2;

p_4) $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ Instância de A_1;

p_5) $p \rightarrow p$ MP de p_4/p_3.

Então, pode-se dizer, informalmente, que a prova de uma assertiva p, é uma seqüência finita "$p_1, ..., p_n$", onde $p_n = p$ e p_i (i = 1, .., n) instâncias de um esquema de axiomas ou a conclusão de alguma regra de inferência.

Definição 4.3.1: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 27*) Um conjunto SP de "*sentenças proposicionais*" é dito fechado com respeito às provas formais, se p $\in$ SP sempre que p é derivado a partir de SP, usando os axiomas A_1-A_3 e MP.

Definição 4.3.2: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 27*) Seja S um conjunto de sentenças. Uma ***regra de inferência R***, sobre S, é um conjunto *R*, tal que $R \subseteq S^n \times S$, com n $\in$ N.

Notação: (Modus Ponens): $\dfrac{p, \quad p \to q}{q} \quad \dfrac{(\text{Premissas})}{(\text{Conclusão})}.$

Caso *R* seja uma regra de inferência nulária, $\dfrac{}{p}$, *R* diz-se "***axioma***".

Um esquema de axiomas é uma abstração da forma de um conjunto de sentenças concretas que são tidas como verdadeiras. Por exemplo, p $\to$ (q $\to$ p) é uma abstração de todas as sentenças que possuem essa forma, onde p, q $\in T_\Sigma(X)$. Num certo ponto de vista, um esquema de axiomas é um ente matemático "perfeito", enquanto que os termos em $T_\Sigma(X)$ que possuem essa forma, são as realizações desse ente matemático. Semelhantemente, uma regra de inferência é um ente matemático "perfeito", cuja realização é um conjunto de objetos "concretos" que possuem a mesma forma. Claramente, existe uma bijeção entre esse conjunto e o ente matemático "perfeito", de tal maneira que ele possa ser o nome desse conjunto, no caso, o nome da regra de inferência.

No que segue, será definido com mais precisão o que é realmente, uma regra de inferência.

Definição 4.3.3: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 28*) Seja *R* uma família de regras de inferência sobre S (conjunto de sentenças). Dado um conjunto *A* (sentenças), tal que $A \subseteq$ S e $p \in$ S, diz-se que "*p é inferido de A usando R*", se existe uma seqüência finita $p_1, ..., p_n$ de elementos de S, tal que $p_n = p$ e para cada p_i ($i = 1 ... k$), ou $p_i \in A$ ou existe uma regra de inferência n-ária $R' \in R$ e $j_1 ... j_n < i$ tal que $(p_{j1}, ..., p_{jn}, p_i) \in R'$.

Definição 4.3.4: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 28*) A seqüência "$p_1, ..., p_n$" é chamada *"prova formal de p, a partir de A"*.

Notação 1: $A \vdash_R p$ (diz-se que *p* é derivável de *A* usando uma família de regras de inferência *R*).

Notação 2: $\vdash_R p$ (usa-se essa notação quando A é um conjunto vazio).

Definição 4.3.5: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 28*) Seja S um conjunto de sentenças e R uma família de regras de inferência sobre S. Um "***sistema formal de provas***" é a tripla $\langle S, R, \vdash_R\rangle$.

Definição 4.3.6: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 28*) Um subconjunto $\overline{A}$ de S, diz-se dedutivamente fechado, se para cada $p \in$ S, $\overline{A} \vdash p$ implica que $p \in \overline{A}$.

Proposição 4.3.7: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 28*) A família de todos os conjuntos dedutivamente fechados com respeito a um sistema de provas formais é um sistema de fecho.

Demonstração:
Seja $\langle S, R, \vdash\rangle$ um sistema formal e C = $\{A/A \subseteq$ S e A é um conjunto dedutivamente fechado$\}$. Para mostrar que C é um sistema de fecho, basta mostrar que, para qualquer D $\subseteq$ C, $\cap$D $\in$ C.

Se $p \in \cap$D, então para todo $A \subseteq$ D, $p \in A$. Como é dedutivamente fechado, então $\forall A$, $A \vdash p$. Assim, $\cap$D $\vdash p$, ou seja, $\cap$D $\in$ C.

Definição 4.3.8: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 28*) Um sistema de fecho C diz-se ***sistema de fecho dedutivo***, se existe um sistema formal tal que C consiste em todos os conjuntos dedutivamente fechados.

Teorema 4.3.9: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 29*) Um sistema de fecho é dedutivo se, e se somente se, é um sistema de fecho algébrico.

Demonstração:
1) Seja C um sistema de fecho dedutivo. Por definição, existe um sistema formal $\langle S, R, \vdash\rangle$, tal que C consiste de todos os conjuntos dedutivamente fechados, ou seja, $\forall X \subseteq S$, $\overline{X} = \{p \in S \,/\, X \vdash p\}$. Se p é derivável a partir de X, então existe um subconjunto finito Y de X, tal que p é derivável de Y. Assim, $\overline{X} = \cup\{\overline{Y}\,/Y \subseteq X$ e Y é finito$\}$. Dessa maneira, C é um sistema de fecho algébrico.

2) Se C é um sistema de fecho algébrico, então existe uma álgebra B tal que $C = \{A/A$ é um subconjunto de B$\}$. Como uma função n-ária, f, sobre S, é um subconjunto de $S^n \times S$, então por definição, elas são regras de inferência. E novamente por definição, um subuniverso A de B é um conjunto dedutivamente fechado. Assim, existe um sistema formal $\langle S, R, \vdash \rangle$, e C consiste de todos os conjuntos dedutivamente fechados.

Devido à ligação entre sistemas algébricos e sistemas dedutivos, no que segue, será definido uma Σ-congruência sobre $T_\Sigma(X)$ utilizando um sistema dedutivo.

4.4. Sistema Dedutivo de Equações/*Lógica Equacional*

Definição 4.4.1: Seja SDed(E) o segundo sistema dedutivo para lógica equacional. Cada regra é representada na forma: $\dfrac{Premissa}{Conclusão}$.

i) $\dfrac{}{t = t}$ ▸ ***Reflexividade***

ii) $\dfrac{t = t'}{t' = t}$ ▸ ***Simetria***

iii) $\dfrac{t = t',\ t' = t''}{t = t''}$ ▸ ***Transitiva***

iv) $\dfrac{t_1 = t_1', \ldots, t_k = t_k'}{f(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1', \ldots, t_k')}$, para todo f ∈ Σ de aridade k ▸ ***Substituição***

v) $\dfrac{t = t'}{t\rho = t'\rho}$ para toda substituição ρ ▸ ***Instanciação***

vi) $\dfrac{}{t = t'}$ para toda Σ-equação $\langle t, t' \rangle \in E$ ▸ ***Equações***.

Neste sistema formal, uma prova de que $t = t'$, é uma sequência da forma $t_1 = t_1'$, $t_2 = t_2'$, ..., $t_k = t_k'$, tal que $t_1 = t_1'$ é uma assertiva oriunda das regras i) ou vi), e $t_i = t_i'$, com i = 2 ... n, são assertivas derivadas da aplicação das demais regras. Se existe uma prova para assertiva $t = t'$ cujas premissas sejam vazias, denota-se este fato por $\vdash_E t = t'$ e diz-se que $t = t'$ é um teorema do sistema dedutivo de equações - SDed(E).

Definição 4.4.2: Seja $=_E$ uma relação sobre $T_\Sigma(X)$. Para $t, t' \in T_\Sigma(X)$, $t =_E t'$ se, e somente se, $\vdash_E t = t'$.

Pelas regras i-iii, $=_E$ é uma relação de equivalência sobre $T_\Sigma(X)$ e pela regra iv, $=_E$ é uma relação de Σ-congruência sobre $T_\Sigma(X)$.

Lema 4.4.3. (*Hennessy*[31]*, 1988, p. 35*) Para $t, t' \in T_\Sigma(X)$, se $\vdash_E t = t'$ e A satisfaz E, então $t =_A t'$; onde $t =_A t'$ se, e somente se, $\rho_A(t) = \rho_A(t')$, para toda A-atribuição ρ_A.

Este lema pode ser declarado mais sucintamente como: $E \subseteq =_A$ implica $=_E \subseteq =_A$.

Demonstração:

1) Para a regra i, se $\vdash_E t = t'$ é uma instância da regra i, então t é t', e trivialmente $\rho_A(t) = \rho_A(t')$ para toda A-atribuição ρ_A.
2) Para a regra ii, deriva-se, $\vdash_E t' = t$ de $t = t'$. Por hipótese, $\rho_A(t) = \rho_A(t')$ e por simetria da igualdade, $\rho_A(t') = \rho_A(t)$, para toda A-atribuição ρ_A.
3) Para a regra iii, considerando que existe um termo t'' tal que $t = t''$ e $t'' = t'$ então deriva-se $t = t'$ por transitividade. Por hipótese, tem-se que $\rho_A(t) = \rho_A(t'')$ e $\rho_A(t'') = \rho_A(t')$ e por transitividade da igualdade, $\rho_A(t) = \rho_A(t')$, para toda A-atribuição ρ_A.
4) Para a regra iv, considerando que t e t' possuem a forma $f(t_1, ..., t_n)$ e $f(t_1^{'}, ..., t_n^{'})$, tem-se uma prova de cada premissa $t_i = t_i^{'}$ cujo tamanho máximo de cada um é k. Por hipótese, $\rho_A(t_i) = \rho_A(t_i^{'})$. Como ρ_A é um Σ(X)-homomorfismo, segue que $\rho_A(f(t_i)) = f_A(\rho_A(t_i)) = f_A(\rho_A(t_i^{'})) = \rho_A(f(t_i^{'}))$, para toda A-atribuição ρ_A.
5) Para a regra v, considerando a prova da premissa $t = t'$ cujo tamanho máximo é k, e em particular, a A-atribuição $\rho_A \circ \rho$, por hipótese, tem-se que $\rho_A \circ \rho\,(t) = \rho_A \circ \rho\,(t')$. Então, pelo lema da substituição, tem-se $\rho_A(t_\rho) = \rho_A(t_\rho^{'})$, para toda ρ_A.
6) Para a regra vi, se $\vdash_E t = t'$ é uma instância da regra vi, então $(t, t') \in E$. Como A satisfaz E, $\rho_A(t) = \rho_A(t')$ para toda A-atribuição ρ_A.

Por indução estrutural, para todo teorema $\vdash_E t = t'$, derivado em SDed(E), e toda A-atribuição ρ_A, se $t =_E t'$ então $\rho_A(t) = \rho_A(t')$.

O lema 4.4.3 estabelece que se uma Σ-álgebra satisfaz um conjunto de equações E, então ela satisfaz a Σ-congruência $=_E$ e, por conseguinte, $\mathcal{C}(E) \subseteq \mathcal{C}(=_E)$.

Teorema 4.4.4: (*Inicialidade em* $\mathcal{C}(E)$) (*Santiago*[7]*, 1995, p.31*)

Para todo conjunto de equações E, $\mathcal{C}(E)$ possui uma álgebra inicial.

Demonstração: A álgebra inicial de $\mathcal{C}(E)$ pode ser exibida, semelhantemente a T_Σ/R, para alguma congruência R. Dessa maneira, utiliza-se a congruência $=_E$ para demonstrar esse teorema. Como $\mathcal{C}(E) \subseteq \mathcal{C}(=_E)$ e $T_\Sigma/=_E$ é inicial em $\mathcal{C}(=_E)$ pelo teorema 4.2.12, então para toda Σ-álgebra A em $\mathcal{C}(E)$ existe um único Σ-homomorfismo de $T_\Sigma/=_E$ para A. Assim, basta mostrar que $T_\Sigma/=_E$ está em $\mathcal{C}$(E).

Seja $(t, t') \in E$ e ρ uma $T_\Sigma/=_E$-atribuição. Deve-se mostrar que $\rho(t) = \rho(t')$. Seja ρ' uma substituição qualquer, tal que $\rho(x) = [\rho'(x)]_{=E}$ para x $\in$ X. Então, pode-se mostrar por indução estrutural sobre t, que $\rho(t) = [t_{\rho'}]_{=E}$. Aplicando a regra da substituição para $t = t'$, com a substituição ρ', obtém-se $t_{\rho'} = t'_{\rho'}$. Logo, $\vdash_E t_{\rho'} = t'_{\rho'}$, i.e., $t_{\rho'} =_E t'_{\rho'}$. Por conseguinte, $\rho(t) = [t_{\rho'}]_{=E} = [t'_{\rho'}]_{=E} = \rho(t')$.

Corolário 4.4.5: (*Santiago*[7]*, 1995, p. 31*)

$T_\Sigma/=_E$ é inicial em $\mathcal{C}(E)$.

Demonstração: Semelhante ao corolário 4.2.13.

Definição 4.4.6: (***Segurança***) Dada uma relação R sobre $T_\Sigma(X)$, um sistema dedutivo é seguro ou correto com respeito a R se $(t, t') \in R$, sempre que $\vdash t\ R\ t'$.

Definição 4.4.7: (***Completude***) Um sistema de prova é dito completo com respeito a uma relação R se $\vdash t\ R\ t'$, sempre que. $(t, t') \in R$.

Essas definições de "*segurança e completude*", respectivamente, querem dizer, em outras palavras, que um sistema dedutivo é seguro se não há derivação de assertivas da forma $t\ R\ t'$ sem que $(t, t') \in R$, e um sistema de prova é completo se não há $(t, t') \in R$ sem uma derivação $\vdash t\ R\ t'$.

Teorema 4.4.8: (*Teorema da Lógica Equacional*) (*Santiago*[7]*, 95, p. 32*)

Seja I_E uma álgebra isomorfa a $T_\Sigma/{=_E}$:

a) SDed(E) é seguro com respeito a $=_E$ sobre $T_\Sigma(X)$;

b) SDed(E) é completo com respeito a $=_E$ restrito a T_Σ.

Demonstração:

a) SDed(E) é seguro com respeito a $=_E$ sobre $T_\Sigma(X)$.

Como I_E é isomorfo a $T_\Sigma/{=_E}$, I_E satisfaz E. Logo, a segurança sai imediatamente do lema 4.4.3.

b) SDed(E) é completo com respeito a $=_E$ restrito a T_Σ.

Supondo que $t =_E t'$, onde $t, t' \in T_\Sigma$, então $i_{I_E}(t) = i_{I_E}(t')$. Como I_E é isomorfo a $T_\Sigma/{=_E}$, então $i_{T_\Sigma/=_E}(t) = i_{T_\Sigma/=_E}(t')$. Assim, $[t]_{=_E} = [t']_{=_E}$, ou seja, $\vdash_E t = t'$.

Todo o processo de resolução de equações, ou verificação de propriedades algébricas (no caso das linguagens de especificações algébricas), lança mão da lógica equacional. No que segue, a lógica equacional, bem como a noção de Σ-homomorfismo, é adaptada para a noção de igualdade local proposta por Santiago[7]. Com isso, pretende-se fornecer uma lógica não só para a resolução de equações locais, como também para a verificação de propriedades expressas, numa linguagem de especificação, em termos de igualdade local. Uma das conseqüências disso é um mecanismo formal, por exemplo para resolver equações reais usando aproximações intervalares e as propriedades do teorema 3.4.1.15.

CAPÍTULO 5

5.1. ÁLGEBRA LOCAL

Um dos conceitos mais importantes dentro da teoria da informação de Scott é o de consistência; onde dois elementos consistentes são vistos como informações de um mesmo objeto. Abstraindo as suas diferenças, elementos consistentes podem ser pensados como sendo equivalentes, e assim como é feito com a noção usual de equivalência poderiam ser substituídos um pelo outro; desconsiderando é claro, o fato de uma informação ser melhor ou pior que a outra, quando essas forem comparáveis.

Entretanto, quando se formaliza essa noção como uma relação usual de equivalência, a lei da transitividade não é satisfeita em certos modelos, mais ainda, como a consistência é expressa em termos da operação de supremo que é total apenas no caso dos sup-reticulados, tem-se então uma "equivalência" definida em termos de uma operação parcial para o caso dos demais domínios semânticos.

Baseado nisso, em 2000, Santiago[34] introduziu a teoria de igualdade local, que é apresentada a seguir. Esse capítulo apresenta um modelo para essa teoria, chamado *conjunto local,* estende a noção de *Σ-álgebra* para *Σ-álgebra local*, e propõe uma *lógica equacional local*, a fim de fornecer meios para a resolução de equações locais ou a verificação de propriedades expressa em termos dessa igualdade.

5.1.1. TEORIA DA IGUALDADE LOCAL

Definição 5.1.1.1: (*Axiomas para a Igualdade Local*)

Assumindo a linguagem de primeira ordem com o símbolo de predicado unário de existência "$\mathcal{E}$" [26] e uma função binária $\sqcup$, os axiomas para a igualdade local são:

(i) $a \overset{loc}{=} a \leftrightarrow \mathcal{E}a$ ► ***Refl.***

(ii) $a \overset{loc}{=} \mathrm{b} \to b \overset{loc}{=} a$ ► ***Simetria***

(iii) $\mathcal{E}(a \sqcup c) \to (a \overset{loc}{=} b \wedge b \overset{loc}{=} c \to a \overset{loc}{=} c)$ ► ***Transitividade local.***

Definição 5.1.1.2: (*Conjuntos Locais*)

Um **sup-Ω-set** ou **conjunto local** é um Ω-set $\langle A, [\![\bullet = \bullet]\!]\rangle$ equipado com uma operação binária parcial $\sqcup: A \times A \to A$ dita ***supremo***, que satisfaz

(i) $a \sqcup a \equiv a$ ► ***Idempotência***

(ii) $a \sqcup \mathrm{b} \equiv b \sqcup a$ ► ***Comutatividade***

(iii) $a \sqcup (\mathrm{b} \sqcup \mathrm{c}) \equiv (a \sqcup b) \sqcup c$ ► ***Associatividade***

e uma relação $[\![\bullet \overset{loc}{=} \bullet]\!]: A \times A \to \Omega$ chamada "***igualdade local***" que satisfaz a seguinte equação:

(iv) $[\![a \overset{loc}{=} b]\!] = \mathcal{E}(a \sqcup b)$.

Proposição 5.1.1.3: Um conjunto local é modelo da teoria da igualdade local.

Demonstração:

1) $[\![a \overset{loc}{=} a]\!] = \mathcal{E}(a \sqcup a) = \mathcal{E}a$, c.f. (i) da definição 4.3.1.1

2) $[\![a \overset{loc}{=} b]\!] = \mathcal{E}(a \sqcup b) = \mathcal{E}(b \sqcup a) = [\![b \overset{loc}{=} a]\!]$, c.f. (ii) da definição 5.1.1.1

3) Segunda Rasiowa[36], a transitividade local $\mathcal{E}(a \sqcup c) \le ([\![a \overset{loc}{=} b]\!] \wedge [\![b \overset{loc}{=} c]\!] \to [\![a \overset{loc}{=} c]\!])$ é equivalente à $\mathcal{E}(a \sqcup c) \to ([\![a \overset{loc}{=} b]\!] \wedge [\![b \overset{loc}{=} c]\!] \to [\![a \overset{loc}{=} c]\!]) = \top$, em qualquer **cHa**. Como $\mathcal{E}(a \sqcup c) = [\![a \overset{loc}{=} c]\!]$ pela (iv) da definição 5.1.1.2, então a implicação $\mathcal{E}(a \sqcup c) \to ([\![a \overset{loc}{=} b]\!] \wedge [\![b \overset{loc}{=} c]\!] \to [\![a \overset{loc}{=} c]\!])$ tem a forma $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ que é, portanto, igual a $\top$.

Definição 5.1.1.4: (*Operações*)

Dado um conjunto local A, uma função $f: A^n \to A$, diz-se uma ***operação local n-ária*** sobre A, se

$[\![a_1 \overset{loc}{=} b_1]\!] \neq \bot, \ldots, [\![a_n \overset{loc}{=} b_n]\!] \neq \bot$, então $[\![f(a_1, \ldots, a_n) \overset{loc}{=} f(b_1, \ldots, b_n)]\!] \neq \bot$ *(5.1.a)*

Definição 5.1.1.5: (*Relações*)

Uma relação R sobre um conjunto local A é uma ***função*** $R{:}A^n \to \Omega$ tal que, se:

$[\![a_1 \overset{loc}{=} b_1]\!] \neq \perp, \ldots, [\![a_n \overset{loc}{=} b_n]\!] \neq \perp$ e $R(a_1, \ldots, a_n) \neq \perp$, então $R(b_1, \ldots, b_n) \neq \perp$ *(5.1.b)*

Definição 5.1.1.6: (*Σ-Álgebra Local*)

Uma ***Σ-álgebra local*** é uma estrutura $\langle A, \Sigma_A \rangle$, onde A é um conjunto local e Σ_A é um conjunto de operações locais n-árias, sobre A.

No que segue será desenvolvida uma teoria algébrica local que é uma versão da teoria das Σ-álgebras. Assim como naquela teoria, a ***sintaxe*** terá o mesmo sentido que na Σ-álgebra clássica. Analogamente, a ***semântica*** dessa sintaxe estará ligada ao significado dos termos, que serão interpretados em Σ-álgebras locais.

Assim como na noção de Σ-álgebra dos termos, em Σ-álgebra local a noção de conjunto local dos termos T_Σ terá o mesmo significado. Dessa maneira, define-se o conjunto local dos termos a partir de um conjunto de termos T_Σ.

Definição 5.1.1.7: Seja Σ uma assinatura qualquer e um T_Σ como na definição 4.1.7.1, ou seja:

(i) Se f tem aridade 0, então $f \in T_\Sigma$;

(ii) Se $f \in \Sigma$ tem aridade $k > 0$, então para todo termo $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$, $f(t_1, \ldots, t_k) \in T_\Sigma$;

(iii) T_Σ é o menor conjunto de termos que contém os elementos da forma (i) ou (ii).

Como anteriormente, os elementos de T_Σ são strings formados por parênteses e vírgulas, juntamente com os símbolos de Σ, que podem ser construídos usando as regras (i) e (ii). Sobre esse conjunto, define-se a seguinte operação binária parcial:

Definição 5.1.1.8: (*Conjunto Local dos Termos*)

Seja a função parcial de $\sqcup_{T_\Sigma} : T_\Sigma \times T_\Sigma \to T_\Sigma$, onde $\forall t, t' \in T_\Sigma$, $\sqcup(t, t') = t$ caso $t = t'$, e indefinido caso contrário. A estrutura $\langle T_\Sigma, \sqcup_{T_\Sigma} \rangle$ diz-se ***conjunto local dos termos***.

Trivialmente, as propriedades (i) – (iii) da definição 5.1.1.2 se verificam em $\langle T_\Sigma, \sqcup_{T_\Sigma} \rangle$. Essa operação modela a noção de supremo entre os termos de T_Σ. Assim, o supremo entre dois termos só tem sentido se eles forem os mesmos, refletindo o fato de que em T_Σ ainda não há uma ordem parcial diferente da ordem parcial trivial (*a igualdade*), sobre a qual se estabelece uma outra noção de supremo, ou seja, $t \sqcup_{T_\Sigma} t' = t$, se $t = t'$, significa que dois termos são considerados consistentes se, e somente se, eles forem os mesmos. No que segue A será omitido de $\sqcup_A$ sempre que possível.

Proposição 5.1.1.9: A estrutura $\langle T_\Sigma, [\![\cdot \overset{loc}{=} \cdot]\!], \sqcup_{T_\Sigma} \rangle$ é um conjunto local, onde a relação de igualdade local $[\![\cdot \overset{loc}{=} \cdot]\!]$ é a identidade entre termos.

Demonstração: Direto da identidade.

Corolário 5.1.1.10: $[\![\cdot \overset{loc}{=} \cdot]\!]$ coincide com a igualdade usual em T_Σ.

Demonstração:

$$[\![t \overset{loc}{=} t']\!] = \begin{cases} 1, & \text{caso} \quad t = t' \\ 0, & \text{caso} \quad t \neq t'. \end{cases}$$

Definição 5.1.1.11: (*Álgebra Local dos Termos*)

Dado um conjunto local dos termos $\langle T_\Sigma, \sqcup_{T_\Sigma} \rangle$ e uma assinatura Σ, para $f \in \Sigma$ de aridade k, seja $f_{T_\Sigma} : T_\Sigma^k \rightarrow T_\Sigma$ uma função que mapeia uma tupla de termos $\langle t_1, ..., t_k \rangle$ no termo $f(t_1, ..., t_k)$. Se f tem $arid = zero$, então isso significa que f_{T_Σ} é simplesmente uma constante em T_Σ, consistindo da string "*f*".

Proposição 5.1.1.12: Para todo $f \in \Sigma$, f_{T_Σ} é uma operação local sobre T_Σ.

Demonstração:

Como a igualdade local $[\![t_1 \overset{loc}{=} t_2]\!]$ coincide com a usual $[\![t_1 = t_2]\!]$ (pelo corolário 5.1.1.10), e f_{T_Σ} são funções bem definidas, então se $[\![t_1 \overset{loc}{=} t_1']\!] = 1, ...,$ e $[\![t_k \overset{loc}{=} t_k']\!] = 1$, então $[\![f_{T_\Sigma}(t_1, ..., t_k) \overset{loc}{=} f_{T_\Sigma}(t_1', ..., t_k')]\!] = 1$.

Definição 5.1.1.13: (*Σ-Homomorfismos Locais*)

Dada duas Σ-álgebras locais $\langle A, \Sigma_A \rangle$ e $\langle B, \Sigma_B \rangle$, um *Σ-homomorfismo local* $h: A \rightarrow B$, é uma ***função*** de A em B, tal que se $a_1, ..., a_n \in A$, $f_A \in \Sigma_A$ e $f_B \in \Sigma_B$, então

$$h(f_A(a_1, ..., a_n)) \equiv_B f_B(h(a_1), ..., h(a_n)) \qquad (5.1.1.a)$$

Observa-se que a noção de ***Σ-homomorfismo local*** enfraquece aquela de Σ-homomorfismo por utilizar a relação de equivalência "≡" de Scott em vez da "identidade", isso porque pode acontecer que termos da linguagem não possuam denotação numa Σ-álgebra local A. Por exemplo, um termo "$1/a$" não tem interpretação em IN, para $i_{IN}(1) = 1$ e $i_{IN}(a) \neq 1$, onde "/" é interpretado como "÷", pois $\div(h(1), h(a)) = i_{IN}(1) \div i_{IN}(a) \notin$ IN. Ou seja, em ambos os casos $\neg\mathcal{E}h(1/a) \wedge \neg\mathcal{E}\div(h(1), h(a))$, o que de acordo com a expressão (3.4.1.c), $h(1/a) \equiv \div(h(1), h(a))$. Dessa maneira, a noção de Σ-homomorfismo é enfraquecida de uma função total para função parcial. Mas, note que não se exigiu que $h(a \sqcup b) \equiv h(a) \sqcup h(b)$, isso porque caso o fosse, faria com que a noção de consistência existente em T_Σ, fosse levada para da álgebra A para a álgebra B, impondo com que a noção lá adotada fosse também a trivial, o que não é interessante, ao contrário, deve-se permitir o oposto, i.e., que uma noção não trivial de consistência seja trazida da semântica para a linguagem através de uma segunda operação de supremo sobre T_Σ.

Proposição 5.1.1.14:

Seja ***Alg-Loc*** a estrutura $\langle Obj_{alg\text{-}loc}, Hom_{Alg\text{-}loc}\rangle$ onde $Obj_{alg\text{-}loc}$ é a classe de todas as álgebras locais e $Hom_{Alg\text{-}loc}$ é a classe de todos os *Σ-homomorfismos locais*. Assim, ***Alg-Loc** **é uma categoria***.

Demonstração:

1) Os itens (1) e (2) da definição 3.4.1.6 de categorias, verificam-se trivialmente na definição de $Obj_{Alg\text{-}loc}$ e $Hom_{Alg\text{-}loc}$;
2) Para toda *Σ-álgebra local* $\langle A, \Sigma_A \rangle$, a função identidade $id_A: A \to A$, *tal que* $id_A(x) = x$, *é um Σ-homomorfismo local, pois* $id_A(f_A(a_1, ..., a_n)) \equiv f_A(a_1, ..., a_n) \equiv f_A(id_A(a_1), ..., id_A(a_n))$.
3) Para toda Σ-álgebra local $\langle A, \Sigma_A\rangle$, $\langle B, \Sigma_B\rangle$ *e* $\langle C, \Sigma_C\rangle$, e os Σ-homomorfismos locais $i: A \to B$ *e* $h: B \to C$, tal que $i(f_A(a_1, ..., a_n)) \equiv_B f_B(i(a_1), ..., i(a_n))$ *e* $h(f_B(b_1, ..., b_n)) \equiv_C f_C(h(b_1), ..., h(b_n))$, a composição $h \circ i: A \to C$ é um *Σ-homomorfismo local*, pois

$$\begin{aligned} h\circ i(f_A(a_1, ..., a_n)) &= h(i(f_A(a_1, ..., a_n))) \\ &\equiv h(f_B(i(a_1), ..., i(a_n))) \\ &\equiv f_C(h(i(a_1)), ..., h(i(a_n))) \\ &= f_C(h\circ i(a_1), ..., h\circ i(a_n)). \end{aligned}$$

4) As demais propriedades de categoria advém do fato dos Σ-homomorfismos locais serem funções.

Definição 5.1.1.15: (*Σ-Álgebra Local Inicial numa Classe*)

Seja C a categoria das Σ-álgebras locais. Então uma Σ-álgebra local ***I*** em C é inicial se para toda Σ-álgebra local ***J*** em C, existe um único Σ-homomorfismo local ***I*** para ***J***.

Teorema 5.1.1.16: Para toda Σ-álgebra local $\langle A, \Sigma_A\rangle$ existe um único Σ-homomorfismo local i_A: $T_\Sigma \rightarrow A$.

Demonstração: A prova desse teorema é análoga a do teorema 4.1.7.4.

1) Primeiro define-se i_A por indução estrutural sobre os termos, e todo termo em T_Σ é da forma $f(t_1, ..., t_k)$ para algum $f \in \Sigma$ de arid = k. Assumindo por indução que $i_A(t_1), ..., i_A(t_k) \in A$, então faz-se $i_A(f(t_1, ..., t_k)) \equiv f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k))$[1]. Dessa maneira, por indução estrutural, tem-se definido i_A para todo elemento em T_Σ. É fácil provar que i_A é um Σ-homomorfismo local. Seja $f \in \Sigma$ de arid = k, então:

$i_A(f_{T_\Sigma}(t_1, ..., t_k)) = i_A(f(t_1, ..., t_k))$ ► pela definição de f_{T_Σ}

$\equiv f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k))$ ► pela definição de i_A.

2) Para mostrar que i_A é único, deve-se provar que ele coincide com todo Σ-homomorfismo de T_Σ para A. Seja h: $T_\Sigma \rightarrow A$ um Σ- homomorfismo local. Prova-se por indução estrutural que $i_A(t) \equiv h(t)$ para todo $t \in T_\Sigma$. Então:

$i_A(f(t_1, ..., t_k)) \equiv f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k))$ ► pela definição de i_A

$\equiv f_A(h(t_1), ..., h(t_k))$ ► por hipótese

$\equiv h(f_{T_\Sigma}(t_1, ..., t_k))$ ► h é um homomorfismo local

$= h(f(t_1, ..., t_k))$ ► pela definição de f_{T_Σ}.

Como todo elemento de T_Σ é da forma $f(t_1, ..., t_k)$ para algum símbolo de função f, segue por indução estrutural que i_A e h coincidem.

Dessa maneira, T_Σ é visto como a *sintaxe de uma linguagem,* e uma Σ-álgebra local $\langle A, \Sigma_A\rangle$ como um *domínio semântico* ou *uma interpretação*. Pelo teorema acima, pode-se

[1] Note que pode acontecer que $i_A(t_1), ..., i_A(t_k) \in A$, mas $i_A(f(t_1, ..., t_k))$, $f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k)) \notin T_\Sigma$. Por exemplo, $i_A(1), i_A(0) \in$ IN e $i_A(1/0), \div(i(1), i(0)) \notin$ IN, mas $i_A(1/0) \equiv \div(i(1), i(0))$.

afirmar que toda expressão ou termo na linguagem tem um único significado em $\langle A, \Sigma_A\rangle$, ou seja, há uma única maneira de interpretar a linguagem num domínio semântico.

5.1.2. CLASSES EQUACIONAIS LOCAIS

Assim como foi feito anteriormente, essa seção generaliza mais um item da teoria das Σ-álgebras; a saber a noção de Σ-congruência.

Segundo a noção usual, uma Σ-congruência R é uma ***relação de equivalência*** tal que para todo $f \in \Sigma$, se $\langle \underline{a}, \underline{a}'\rangle \in R$, então $R(f_A(\underline{a}), f_A(\underline{a}')) \in R$. Uma Σ-congruência pode ser vista como uma função Booleana $R{:}A{\times}A \to \{0, 1\}$ que satisfaz a reflexividade, simetria e transitividade e $R(\underline{a}, \underline{a}') = 1 \Rightarrow R(f_A(\underline{a})\ R\ f_A(\underline{a}')) = 1$. Portanto, dado um conjunto $\langle A, =\rangle$, uma relação de congruência nada mais é do que uma outra relação de equivalência (além da igualdade) sobre A, dando origem à estrutura $\langle A, =, R\rangle$ e tal que a implicação acima acontece. No que segue, generalizar-se-á a noção de ***Σ-congruência*** para ***Σ-congruência local***.

Definição 5.1.2.1: Dado uma Σ-álgebra local $\langle A, \Sigma_A, \sqcup_A, [\![\cdot \overset{loc}{=} \cdot]\!]_A\rangle$ e uma operação de supremo $\vee$ sobre A, uma Σ-congruência local é uma relação de igualdade local R sobre A, definida em termos de $\vee$, i.e., $[\![a\ R\ b]\!] = \mathcal{E}(a \vee b)$, tal que para todo $f \in \Sigma$ de aridade k, se $R(a_1, b_1) \neq \perp$, ..., e $R(a_k, b_k) \neq \perp$, então $R(f_A(a_1, ..., a_k), f_A(b_1, ..., b_k)) \neq \perp$.

Definição 5.1.2.2: Seja $\overset{loc}{=}_{\mathrm{A}}$ uma Σ-congruência local sobre T_Σ. Diz-se que uma Σ-álgebra local $\langle \mathrm{A}, [\![\cdot\overset{loc}{=}\cdot]\!]\rangle$ satisfaz $\overset{loc}{=}_{\mathrm{A}}$ se, e somente se, $[\![\mathrm{i}_{\mathrm{A}}(t_1) \overset{loc}{=} \mathrm{i}_{\mathrm{A}}(t_2)]\!] \neq \perp$ sempre que $\overset{loc}{=}_{\mathrm{A}}(t_1, t_2) = 1$.

Teorema 5.1.2.3: (*Inicialidade para Σ-congruências locais*)

Seja $\mathcal{C}(R)$ a classe de todas as Σ-álgebras locais que satisfazem a Σ-congruência local R. Então $\langle T_\Sigma, R, \vee\rangle$ é inicial em $\mathcal{C}(R)$, onde $\vee$ é a operação de supremo sobre a qual está definido R.

Demonstração:

1) $\langle T_\Sigma, R, \vee\rangle$ está na categoria. Como R é uma Σ-congruência local, então $T_{\Sigma_R} = \langle T_\Sigma, R\rangle$ é uma Σ-álgebra local, e portanto, se $R(t_1, t_2) = 1$ então $[\![\, i_{T_{\Sigma_R}}(t_1) \overset{loc}{=} i_{T_{\Sigma_R}}(t_2)]\!] = R(t_1, t_2) = 1 \neq \bot$;
2) Seja $A \in \mathcal{C}(R)$, fazendo $h\colon T_{\Sigma_R} \to A$ por $h(t) \equiv i_A(t)$, tem-se imediatamente do teorema 5.1.1.16 que i_A é um Σ-homomorfismo local único de T_{Σ_R} em A.

A noção de Σ(X) e T_Σ(X) estende-se naturalmente para Σ-álgebra local dos termos, de maneira análoga a definição 4.2.5.

Teorema 5.1.2.4: (*Freeness*)

Seja A uma Σ-álgebra local e ρ_A uma A-atribuição para X, então existe um único Σ-homomorfismo local de T_Σ(X) para A tal que $h_A(x) = \rho_A(x)$ para todo $x \in$ X.

Demonstração:

1) Define-se h_A por indução estrutural em termos de T_Σ(X).
   a) Se t é uma variável em X, faça $h_A(t) = \rho_A(t)$;
   b) Caso contrário, t tem a forma $f(\underline{t})$ para algum $f \in \Sigma$. Assumindo $h_A(\underline{t}) \in A$, então faça $h_A(f(\underline{t})) \equiv f_A(h_A(\underline{t}))$. Dessa maneira, por indução estrutural, h_A está definido para todo elemento de T_Σ(X). É fácil provar que i_A é um homomorfismo local. Seja $f \in \Sigma$ de arid = k, então

      $i_A(f_{T_\Sigma}(t_1, ..., t_k)) = i_A(f(t_1, ..., t_k))$ ► pela definição de f_{T_Σ}

      $\equiv f_A(i_A(t_1), ..., i_A(t_k))$ ► pela definição de i_A.

2) Seja h': T_Σ(X) → A outro Σ-homomorfismo local que coincide com ρ_A em X. Deve-se mostrar por indução estrutural que $h(t) \equiv h'(t)$ para todo $t \in T_\Sigma$(X).
   a) Caso $t \in$ X então $h(t) = \rho_A(t) = h'(t)$;
   b) Caso contrário, t tem a forma $f(\underline{t})$ para algum $f \in \Sigma$. Assim supondo $h_A(\underline{t}) \equiv h'_A(\underline{t})$,

      $h_A(f(\underline{t})) \equiv f_A(h_A(\underline{t}))$, por definição de h_A

      $\equiv f_A(h'_A(\underline{t}))$, pois h' é um Σ-homomorfismo local

      $\equiv h'_A(f(t))$.

Assim como o teorema 4.2.7 é uma versão do teorema 4.1.7.4, o teorema acima é uma versão para Σ-álgebras locais do teorema 4.2.7 (Freeness). No que segue, as noções de A-atribuição e instanciação são mantidas, entretanto, o lema da substituição é adaptado para o caso dos Σ-homomorfismos locais.

Lema 5.1.2.5: (*Lema da substituição*)

Para toda *A*-atribuição ρ_A toda substituição ρ, a única extensão de *A*-atribuição $\rho_A \circ \rho$ a $T_\Sigma(X)$ é dada pela função $h(t) \equiv h_A(t\rho)$, onde h_A é a única extensão de ρ_A.

Demonstração: A função h é obviamente um Σ-homomorfismo local e coincide com a A-atribuição $\rho_A \circ \rho$ nas variáveis. De acordo com o teorema *Freeness*, h é único.

Exemplo: Seja t = y/x.

a) Substitui-se t e depois avalia-se tρ:

$\rho(y) = z^2$ ► Substituição

$\rho(x) = w$ ► Substituição

$t\rho = z^2/w$ ► Extensão

$\rho_{IN}(z) = 2$ ► Avaliação

$\rho_{IN}(x) = 0$ ► Avaliação

$h_A(t\rho) \equiv 2^2/0$ ► Extensão.

b) Avalia-se o termo a ser substituído e então avalia-se o termo original (t) usando a atribuição modificada:

$\rho_{IN}(z) = 2$ ► Avaliação

$\rho_{IN}(x) = 0$ ► Avaliação

$\rho(y) = z^2$ ► Substituição

$\rho(x) = w$ ► Substituição

$h'_{IN}(y) = h_{IN}(\rho(y)) = h_{IN}(z^2) = 2^2$ ► Extensão

$h'_{IN}(x) = h_{IN}(\rho(x)) = h_{IN}(w) = 0$ ► Extensão

$h'_{IN}(t) = h_{IN}(z^2/w) \equiv h_{IN}(z^2) / h_{IN}(w) \equiv 2^2 / 0$ ► Extensão.

Definição 5.1.2.6: (*Σ-Equação Local*)

Uma Σ-equação local é um par $\langle t, t' \rangle \in T_\Sigma \times T_\Sigma$, freqüentemente escrito como $t \overset{loc}{=} t'$. Um conjunto de equações locais é portanto, uma relação binária finita sobre $T_\Sigma(X)$. Diz-se que ***uma relação binária R sobre $T_\Sigma(X)$ satisfaz um conjunto de equações E*** se, e somente se, $\boldsymbol{E \subseteq R}$. ***Uma Σ-álgebra local satisfaz um conjunto de equações locais E***, se, e somente se, para toda Σ-equação local $\langle t, t' \rangle \in E$ e toda *A*-atribuição ρ_A, $[\![h_A(t) \overset{loc}{=} h_A(t')]\!] \neq \bot$.

Assim como no caso das Σ-álgebras, no que segue, será introduzido um sistema dedutivo "equacional", a fim de que propriedades de uma Σ-álgebra local sejam verificadas finitamente.

5.1.3. SISTEMA DEDUTIVO DE EQUAÇÕES LOCAIS *(LÓGICA EQUACIONAL LOCAL)*

Definição 5.1.3.1: Assumindo o axioma da equivalência (eq) de Scott, seja $\mathrm{SDed}_{\mathrm{Loc}}(E)$ um sistema dedutivo para equações locais que formaliza a noção de ***álgebra local***, dado pelas seguintes regras. Cada regra é representada na forma: $\dfrac{\text{Premissa}}{\text{Conclusão}}$ e $\bigcup$ é a operação de supremo.

i) $\dfrac{\varphi(t, t')}{\varepsilon(t \bigcup t')}$ ► ***Condição de Existência do Supremo***

ii) $\dfrac{}{t \bigcup t \equiv t}$ ► ***Idempotência***

iii) $\dfrac{}{t \bigcup t' \equiv t' \bigcup t}$ ► ***Comutatividade***

iv) $\dfrac{}{t \bigcup (t' \bigcup t'') \equiv (t \bigcup t') \bigcup t''}$ ► ***Associatividade.***

v) $\dfrac{}{t \overset{\mathrm{loc}}{=} t \leftrightarrow \varepsilon t}$ ► ***Refl.***

vi) $\dfrac{t \overset{\mathrm{loc}}{=} t'}{t' \overset{\mathrm{loc}}{=} t}$ ► ***Simetria***

vii) $\dfrac{\varepsilon(t \bigcup t''),\ t \overset{\mathrm{loc}}{=} t',\ t' \overset{\mathrm{loc}}{=} t''}{t \overset{\mathrm{loc}}{=} t''}$ ► ***Transitividade Local***

viii) $\dfrac{t_1 \overset{\mathrm{loc}}{=} t_1',\ \ldots,\ t_k \overset{\mathrm{loc}}{=} t_k'}{f(t_1, \ldots, t_k) \overset{\mathrm{loc}}{=} f(t_1', \ldots, t_k')}$, para todo $f \in \Sigma$ de aridade k ► ***Substituição***

ix) $\dfrac{t \overset{\mathrm{loc}}{=} t'}{t\rho \overset{\mathrm{loc}}{=} t'\rho}$ para toda substituição ρ ► ***Instanciação***

x) $\dfrac{}{t \overset{\mathrm{loc}}{=} t'}$ para toda Σ-equação local $\langle t, t' \rangle \in E$ ► ***Equações.***

Na regra (i), a premissa $\varphi(t, t')$ estabelece a condição para se concluir a existência do supremo entre t e t'. Por exemplo:

a) No caso da ***igualdade local trivial*** em T_Σ - c.f. definição 5.1.3.1, $\varphi(t, t')$ seria $t = t'$, ou seja,

$$\frac{t = t'}{\varepsilon(t \cup t')};$$

b) No caso de uma igualdade local sobre intervalos, $\varphi([a_1, b_1], [a_2, b_2])$ seria algo semelhante à $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$, ou seja, teria-se:

$$\frac{[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \phi}{\varepsilon([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2])}.$$

As regras (ii), (iii) e (iv) estabelecem as propriedades algébricas do supremo; (v), (vi) e (vii) as propriedades da igualdade local; (viii) a propriedade de congruência; (ix) as instanciações; e (x) o conjunto das Σ-equações locais da teoria em questão.

Teorema 5.1.3.2: Para $t, t' \in T_\Sigma(X)$, $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ e A satisfaz E, então para toda A-atribuição ρ_A, $[\![h_A(t) \overset{loc}{=} h_A(t')]\!] \neq \perp$, sempre que $h_A(t), h_A(t') \in A$.

Demonstração: Sejam $t, t' \in T_\Sigma(X)$. Suponha que A satisfaz E e $h_A(t), h_A(t') \in A$.

1) Se $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ é uma instância da regra (x), então $(t, t') \in E$. Como A satisfaz E, então $[\![h_A(t) \overset{loc}{=} h_A(t')]\!] \neq \perp$, para toda A-atribuição ρ_A;
2) Caso $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ seja uma instância da regra (vi), então existe uma prova da premissa $t \overset{loc}{=} t'$ cujo tamanho máximo é k. Por hipótese, $[\![h_A(t) \overset{loc}{=} h_A(t')]\!] \neq \perp$, e pela simetria da igualdade local, $[\![h_A(t) \overset{loc}{=} h_A(t')]\!] \neq \perp$ para toda A-atribuição ρ_A;
3) Se $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ é uma instância da regra (vii), então existe uma prova das premissas $\vdash \mathcal{E}(t \cup t'')$, $\vdash t \overset{loc}{=} t'$ e $\vdash t' \overset{loc}{=} t''$, cujo caminho máximo é k. Como $\vdash \mathcal{E}(t \cup t'')$ é derivado no sistema apenas da condição de existência do supremo $\varphi(t, t'')$, então $[\![\varphi(t, t'')]\!] \neq \perp$ se, e somente se, $[\![\exists y.y{=}t \cup t'']\!] = [\![\mathcal{E}(t \cup t'')]\!] \neq \perp$. Como A é um conjunto local, então $[\![\mathcal{E}(t \cup t'')]\!] = [\![t \overset{loc}{=} t'']\!] \neq \perp$;
4) Se $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ é uma instância da regra (viii), então t, t' possuem a forma $f(t_1, ..., t_k)$ e $f(t_1', ..., t_k')$. Além disso, existe uma prova de cada premissa "$t_i \overset{loc}{=} t_i'$", cujo tamanho máximo é k. Por hipótese, $[\![h_A(t_i) \overset{loc}{=} h_A(t_i')]\!] \neq \perp$ e $h_A(f(t_1, ..., t_k))$, $h_A(f(t_1', ..., t_k')) \in A$. Como h_A é um Σ-homomorfismo local, então $h_A(f(t_1, ..., t_k)) = f_A(h_A(t_1),..., h_A(t_k))$ e

$h_A(f(t'_1, ..., t'_k)) = f_A(h_A(t'_1), ..., h_A(t'_k))$. Como f_A é uma operação local, então $[\![f_A(h_A(t_1),..., h_A(t_k)) \overset{loc}{=} f_A(h_A(t'_1), ..., h_A(t'_k))]\!] = [\![h_A(f(t_1, ..., t_k)) \overset{loc}{=} h_A(f(t'_1, ..., t'_k))]\!] \neq \perp$;

5) Se $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ é uma instância da regra (ix), então *t, t'* possuem a forma $t\rho$ e $t'\rho$, para toda substituição ρ. Além disso, existe uma prova da premissa $t \overset{loc}{=} t'$, cujo tamanho máximo é k. Considere a *A*-atribuição $\rho_A \circ \rho$, por indução $[\![h_A(t) \overset{loc}{=} h_A(t')]\!] \neq \perp$, onde h_A é a única extensão de $\rho_A \circ \rho$. Como $h_A(t\rho)$, $h_A(t'\rho) \in A$, então pelo lema da substituição $h_A(t) = h_A(t\rho)$ e $h_A(t') = h_A(t'\rho)$, e portanto, $[\![h_A(t\rho) \overset{loc}{=} h_A(t'\rho)]\!] \neq \perp$.

O teorema acima garante que ao deduzir uma Σ-equação local $\vdash_E t \overset{loc}{=} t'$ no sistema $SDed_{Loc}(E)$, as interpretações de *t* e *t'* serão localmente iguais na Σ-álgebra local que satisfaz o conjunto de equações *E*, sempre que *t* e *t'* tiverem significado em *A*. A diferença desse teorema para o lema 5.1.2.5 (*Lema da substituição*), reside não somente na diferença entre a ***igualdade local*** e a ***igualdade usual***, mas no fato das regras de substituição e instanciação da lógica equacional, não garantirem que as conclusões possuam significado.

5.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A contribuição desse capítulo reside na proposta de uma teoria algébrica baseada na noção de igualdade local, levando em consideração não somente a noção de objetos localmente iguais, mas também o caso de teorias algébricas que envolvam objetos parcialmente definidos; daí a versão ***Σ-homomorfismo local***. Algumas das conseqüências/ propostas de utilização da noção de Σ-álgebra local são dadas na conclusão da dissertação.

CAPÍTULO 6

6.1. CONCLUSÃO

A resolução de equações intervalares como extensão de equações reais através da igualdade usual e da aritmética de Moore possui alguns problemas, principalmente, pelo fato da aritmética de Moore não possuir o inverso aditivo. Por exemplo, a solução intervalar da equação X + [3, 4] = [2, 3], que estende a equação x + 3.5 = 2.8, é [-1, -1] que não contém a solução – 0.7. Entretanto, se fosse possível obter a equação X = [2, 3] - [3, 4], o termo à direita dessa igualdade conteria a solução – 0.7. Essa questão dos intervalos não possuírem as mesmas propriedades dos números reais, impossibilita a utilização da lógica equacional, tanto para a derivação da equação X = [2, 3] - [3, 4] a partir da equação X + [3, 4] = [2, 3], como a verificação algébrica de propriedades num sistema computacional, cujos dados sejam números reais representados através de intervalos. Mas, com a noção de ordem de informação, e de aproximação, introduzida por Aciòly[6] em 1991, a idéia de uma equação intervalar representar satisfatoriamente uma equação real, já que esta pretende carregar a informação sobre a solução da equação real, passa a ter sentido, através da utilização da igualdade simples e posteriormente, da igualdade local intervalares, propostas por Santiago, respectivamente, em [8] e [33]. Baseado nisso, esta dissertação propôs uma extensão da igualdade local para álgebra local, a fim de formalizar noções algébricas em termos da igualdade local.

Através da formulação do sistema dedutivo anterior, percebeu-se que a parcialidade em certos termos, pode surgir de termos não parciais, apenas com a aplicação das regras de substituição e instanciação. Em outras palavras, são essas regras que podem introduzir a não existência a partir de termos existentes. Portanto, é necessário que tais regras sejam reformuladas a fim de remover a premissa “sempre que $h_A(t)$, $h_A(t') \in A$” do teorema 5.1.3.2.

Com a introdução da noção de Σ-álgebras locais, deu-se um passo no sentido de uma semântica denotacional, alternativa às “institutions” de Goguen e Burstall[40], para linguagens de especificações algébricas, no sentido de que não se leva apenas a consideração de elementos idênticos, mas generaliza-se essa idéia para elementos consistentes, permitindo a especificação algébrica de sistemas cujos elementos são meras informações/aproximações dos elementos a serem computados, permitindo assim que, em alguns casos, as propriedades algébricas dos elementos a serem computados sejam simuladas pelas propriedades da álgebra local, das informações utilizadas, fazendo com que propriedades nesse sistema possam ser verificadas, utilizando apenas a informação dos objetos a serem computados.

6.2. TRABALHOS FUTUROS

1. Resolver o problema das regras de substituição e instanciação, mencionado na conclusão;
2. Implementar a noção de Σ-álgebra local em uma linguagem de especificação algébrica, como CASL[2], que utiliza a igualdade simples de Scott como primitiva;
3. Propor a especificação algébrica e a verificação de um sistema que utilize números reais, representados por intervalos e a igualdade local.

[2] The Common Algebraic Specification Language [41].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. ***Cálculo numérico****: aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1996.

[2] OLIVEIRA, P. W.; DIVERIO, T. A.; CLAUDIO, D. M. ***Fundamentos de matemática intervalar***. Porto Alegre: Sagra-Luzzato, 1997. (Série Matemática da Computação e Processamento Paralelo, 1).

[3] KEARFORTT, R. B. ***Rigorous global search****: continuous problems*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[4] SANTOS, C. D. P.; AGUIAR, M. S.; DIMURO, G. P. *As técnicas intervalares em substituição ao método clássico de estimativa de erro*. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17, 1994, Vitória. **Anais ...** Vitória: SBMAC, 1994. v 1.

[5] BARBOZA, L. V.; DIMURO, G. P. *Por que o computador erra? Uma visão didática*. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 15, 1992, São Carlos. **Anais...** São Carlos: SBMAC, 1992, [GD1].

[6] ACIÓLY, B. M. ***Fundamentação computacional da matemática intervalar***. 1991. 263p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) - Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

[7] SANTIAGO, R. H. N. ***No sentido de uma lógica construtiva para a análise real***. 1995. 147p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Departamento de Informática, Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

[8] SANTIAGO, R. H. N. ***Teoria das equações intervalares locais***. 1999. 125p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) - Departamento de Informática, Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

[9] BEDREGAL, B. R. C. ***Continuous information systems:*** *a logical and computational approach to interval mathematic*. 1996. Tese (Doutorado em Ciência

da Computação) - Departamento de Informática, Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

[10] ACIÓLY, B. M.; BEDREGAL, B. R. C. *A "metric" topology compatible with inclusion monotonicity on interval space*. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL METHODS AND COMPUTER AIDED PROOFS IN SCIENCE AND ENGINEERING - INTERVAL'96, 1996, Germany. **Proceedings ...** Germany, 1996.

[11] BEDREGAL, B. R. C.; ACIÓLY, B. M. *An information system approach to interval mathematics*. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL METHODS AND COMPUTER AIDED PROOFS IN SCIENCE AND ENGINEERING - INTERVAL'96, 1996, Germany. **Proceedings ...** Germany, 1996.

[12] BEDREGAL, B. R. C.; ACIÓLY, B. M. *Interval deductions in continuous domain logic*. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL METHODS AND COMPUTER AIDED PROOFS IN SCIENCE AND ENGINEERING - INTERVAL'96, 1996, Germany. **Proceedings ...** Germany, 1996.

[13] BEDREGAL, B. R. C.; ACIÓLY, B. M. *Moore-computability: a proposal for a computable interval analysis.* **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, Porto Alegre-RS, 1997.

[14] ACIÓLY, B. M.; BEDREGAL, B. R. C. *A quasi-metric topology compatible with inclusion monotonicity on interval space*. **International Journal Reliable Computing**, v.3, n.3, p. 305-310, 1997.

[15] ACIÓLY, B. M.; BEDREGAL, B. R. C. *An intervals domain logic*. In: PANAMERICAN WORKSHOP OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS, 2, 1997, Gramados-RS. **Abstracts ...** Gramados-RS, 1997, p. 90.

[16] CLAUDIO, D. M et al. ***Versões intervalares do método de Newton***. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991, 89p. (Relatório de Pesquisa, 161).

[17] DIVERIO, T. A.; FERNANDES, U. A. L. ***Aplicações de intervalos***. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1994, 64p. (Relatório de Pesquisa, 235).

[18] MOORE, R. E. ***Interval Analysis***. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966. 145p.

[19] MOORE, R. E. ***Methods and applications for interval analysis***. Philadelphia: SIAM, 1979. 190p.

[20] ALLISON, L. ***A pratical introduction to denotational semantics***. Cambridge: [s.n.], p. 37, 1986. (Computer Science Texts, 23).

[21] LIPSCHUTZ, S. ***Topologia geral***. Traduzido por Alfredo Alves de Faria. Rio de Janeiro: Mcgraw-Hill do Brasil, 1971. (Coleção Schaum).

[22] LIMA, E. L.. ***Espaços métricos***. Rio de Janeiro: IMPA, 1975.

[23] LIMA, E. L. ***Análise real***. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989 v. 1. (Coleção Matemática Universitária).

[24] DAVEY, B. A.; PRIESTLEY, H. A. ***Introduction to lattices and order***. Cambridge: University Press, 1992.

[25] RUDIN, W. ***Principles of mathematical analysis***. [S.l.]: McGraw-Hill, 1953.

[26] SCOTT, D. S. *Identify and existence in intuitionistic logic*. In: Fourman, M. P.; Mulvey, J.; Scott, D. S. ***Lecture notes in mathematics: applications of sheaves, 753*** – Proceedurs of the research systems on applications of sheaf theory to logic, algebra and analysis, Berlin: Springer-Verlag, 1977. p. 660-696.

[27] MACLANE, S. ***Categorias for the working mathematician***. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

[28] FOURMAN, M. P.; SCOTT, D. S. *Sheaves and logic*. In: Fourman, M. P.; Mulvey, J.; Scott, D. S. ***Lecture notes in mathematics: applications of sheaves, 753*** – Proceedurs of the research systems on applications of sheaf theory to logic, algebra and analysis, Berlin: Springer-Verlag, 1977. p. 302-401.

[29] MOORE, R. E. ***Interval aritmetic and automatic error analysis in digital computing***. 1962. Tese (Doutorado) - Stanford University, Stanford.

[30] KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. *The aritmetic of the digital computer: a new approach*. **SIAM Review**, v.1, n.28, p.1-40, Mar. 1986.

[31] HENNESSY, M. ***Algebraic theory of processes***. Cambridge: MIT Press, 1988.

[32] BEESON, M. J. ***Foundations of construtive mathematics***. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[33] SANTIAGO, R. H. N.; ACIOLY, B. M. *Interval local equality*. In: SCAN 2000/INTERVAL'2000, 2000, Germany. **Book of Abstract ...** p.172, Germany, 2000.

[34] SANTIAGO, R. H. N.; ACIOLY, B. M. *Identity and consistency*. In: CNMAC, 23, 2000, Santos/SP. **Proceedings ...** p. 338, Santos/SP, 2000.

[35] GOLDBLATT, R. ***The categorial analysis of logic***. Amsterdan: North-Holland, 1984. (Estudies in logic and the foundation of mathematics, 98).

[36] RASIOWA, H. ***An algebraic approach to non-classical logics***. Amsterdan: North-Holland Publishing Company, 1974.

[37] SUNAGA, T. *Theory of na interval algebra and its applications to numerical analysis*. **RAAG Memoirs**, v. 2, p. 29-46, 1958.

[38] GIERZ, G et al. ***A compendium of continuous lattices***. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[39] CRUZ, M. M. C. ***Uma relação de equivalência entre funções intervalares baseada na noção de consistência***. 2000. 80p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Departamento de Informática e Matemática Aplicada, Mestrado em Sistema e Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

[40] GOGUEN, J. A.; BURSTALL, R. ***Institutions: abstract model theory for specifications and programming***. Disponível em: ⟨http://www.csc.vcsd.edu/users/goguen/ps/ins.ps.gz⟩

[41] CoFI Coroup, ***The common framework instiative for algebraic specifications and development, eletronic media:*** *notes and documents available at the CoFI***.** Disponível em: ⟨http://www.brics.dk/Projects/CoFI/index.html⟩